7 Graphes

Plan du chapitre :

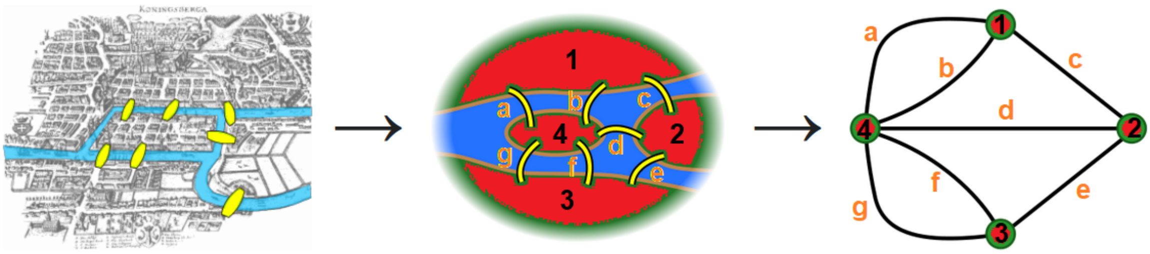
7.1 Calcul matriciel

7.2 Typologie des graphes

7.3 Puissance d'une matrice d'adjacence, Chaîne de Markov

7.4 Suite de matrices

Aperçu historique : La notion de graphe est récente puisqu'elle commence seulement au XVII^{e} siècle avec le fameux problème des sept ponts de la ville de Königsberg que résolut Leonhard Euler en 1735 : on cherchait à déterminer s'il existe un chemin permettant de revenir à son point de départ en empruntant une fois et une seule chacun des ponts de la ville. Euler montra qu'un tel chemin n'existait pas et il le prouva en exhibant le graphe correspondant au problème et en justifiant l'impossibilité par le fait que ses quatre sommets sont incidents à un nombre impair d'arêtes.



La théorie des graphes est une discipline mathématique qui a été élaborée progressivement et qui a aujourd'hui de nombreuses applications dans tous les domaines liés à la notion de réseau (réseau social, réseau informatique, télécommunications, etc.) et dans bien d'autres domaines (génétique, algorithmique).
De nombreuses informations d'un graphe peuvent être représentées par une matrice.
Le calcul matriciel proprement dit n'est apparu qu'au début du XIX^{e} siècle, mais les matrices, en tant que tableaux de nombres, ont une longue histoire d'applications à la résolution d'équations linéaires. En Chine, au II^{e} siècle avant J.-C., le livre *Les Neuf Chapitres sur l'Art Mathématique* utilise des déterminants pour résoudre des systèmes d'équations. En Europe, le livre *Ars Magna* de Jérôme Cardan publié en 1545 reprend cette méthode. Les transformations géométriques sont ensuite étudiées à l'aide de matrices en 1659 dans le livre du hollandais Johan de Witt *Elementa curvarum linearum*. Au XVIII^{e} siècle, Gottfried Wilhem Leibniz (1646 - 1716) puis Gabriel Cramer (1704 - 1752) font avancer le sujet en développant la théorie des déterminants. James Joseph Sylvester, en 1850, forge le terme *matrix*, traduit par matrice, sur la racine *mater* (la mère qui donne naissance aux déterminants). En 1854, Arthur Cayley définit les règles du calcul matriciel et donne à ce sujet une dimension plus abstraite qui en généralise l'utilisation.
En 1913 apparait la notation moderne des parenthèses (ou des crochets) pour représenter les matrices, ainsi que de la notation systématique $A = (a_{ij})$ (ou $[a_{ij}]$) où a_{ij} désigne le terme de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne.

1. Calcul matriciel

1.a. Matrices

DÉFINITION 7.1 (MATRICE) Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
La matrice $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ est le tableau de nombres a_{ij} où i désigne le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne, le nombre a_{ij} étant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Remarques :

- Les *coefficients* de la matrice $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ sont les nombres a_{ij}.
  La *dimension* (on dit aussi taille, format) de la matrice est le nombre $n \times p$ de ses coefficients.
  L'ensemble des matrices à coefficients réels de dimension $n \times p$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
  Bien sûr, il existe aussi des matrices à coefficients complexes ou entiers.
  Les matrices nulles – notées O – ont tous leurs coefficients égaux à zéro.
- Écrire explicitement les coefficients d'une matrice de dimension 2×3 revient à écrire
  $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant 2, 1\leqslant j\leqslant 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.
  On peut aussi avoir à écrire explicitement une matrice de dimension $n \times p$:
  $$B = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} = \begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$
- On distingue les « matrices lignes » telles que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ lorsque $n = 1$,
  les « matrices colonnes » telles que $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ lorsque $p = 1$,
  les « matrices carrées » telles que $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ lorsque $n = p$.
  L'ensemble des matrices carrées à coefficients réels de dimension $n \times n$ est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

DÉFINITION 7.2 (ÉGALITÉ) Deux matrices de même dimension $n \times p$ sont égales si et seulement si tous les coefficients de même rang sont égaux. Autrement dit :
$(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], a_{ij} = b_{ij}$.

DÉFINITION 7.3 (SOMME) La somme de deux matrices de même dimension est une matrice de même dimension dont les coefficients sont obtenus en sommant les coefficients de même rang des deux matrices : $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

PROPRIÉTÉ 7.1 (ADDITION) $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif.

- Commutativité : $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}^2(\mathbb{R}), A + B = B + A$
- Associativité : $\forall (A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,p}^3(\mathbb{R}), A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$
- Élément neutre : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), A + O = O + A = A$
- Opposé : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \exists -A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), A + (-A) = O$. Si $A = (a_{ij})$ alors $-A = (-a_{ij})$

Remarques :

- Attention :l'addition de deux matrices de dimensions différentes n'a pas de sens.
- Soustraction dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: la différence de deux matrices A et B de même dimension est la matrice $A-B$ obtenue en additionnant A et l'opposée de B : $A-B=A+(-B)$.
- Ces propriétés découlent des propriétés de l'addition dans $\mathbb{R}$ et de la définition de l'addition matricielle. Bien sûr, ces propriétés ne dépendent pas de l'ensemble numérique dans lequel sont pris les coefficients : $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{Z}),+)$ ou $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C}),+)$ sont également des groupes commutatifs.

Exemple 1 – Avec $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}$, on a $-A=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-4&-5&-6\\-7&-8&-9\end{pmatrix}$,

$A+B=\begin{pmatrix}1+9&2+8&3+7\\4+6&5+5&6+4\\7+3&8+2&9+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&10&10\\10&10&10\\10&10&10\end{pmatrix}$

$B-A=\begin{pmatrix}9-1&8-2&7-3\\6-4&5-5&4-6\\3-7&2-8&1-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6&4\\2&0&-2\\-4&-6&-8\end{pmatrix}$

Définition 7.4 (Produit par un réel) Soit $A=(a_{ij})$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel. La matrice λA est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par (λa_{ij})

Propriété 7.2 (Espace vectoriel) Le produit d'une matrice par un réel vérifie :

- Distributivité sur les matrices : $\forall(A,B)\in\mathscr{M}^2_{n,p}(\mathbb{R}),\forall\lambda\in\mathbb{R},\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- Distributivité sur les facteurs : $\forall A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- Associativité : $\forall A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$
- Élément neutre : $\forall A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),1A=A$

Comme de plus $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),+)$ est un groupe commutatif, l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de l'addition matricielle et du produit par un réel est un espace vectoriel.

Remarques :

- Quelle que soit la matrice A, $0A=O$ et $(-1)A=-A$
- Si λ et μ sont deux réels quelconques, une combinaison linéaire des deux matrices de même dimension A et B est une matrice $\lambda A+\mu B$.
- L'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées à coefficients réels de dimension 2×2 est engendré par les matrices carrées suivantes $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ dans le sens qu'une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit comme une combinaison linéaire de ces quatre matrices : $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=aI+bJ+cK+dL$. De même, l'ensemble $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels de dimension 3 est engendré par trois matrices formant une base de cet espace vectoriel : $I=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,$J=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $K=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=aI+bJ+cK$.

Définition 7.5 (Transposition) La transposée d'une matrice $A=(a_{ij})$ de dimension $n\times p$ est la matrice $B=(b_{ij})$ de taille $p\times n$ notée ${}^{\mathrm{t}}A$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. Autrement dit $B={}^{\mathrm{t}}A\iff\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!],b_{ij}=a_{ji}$.
Si une matrice carrée est égale à sa transposée ($A={}^{\mathrm{t}}A$), on dit que la matrice est *symétrique*, si elle est égale à l'opposé de sa transposée ($A=-{}^{\mathrm{t}}A$), on dit que la matrice est *antisymétrique*.

Exemple 2 – Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,
on a ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et ${}^tC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
B est symétrique, C antisymétrique (les coefficients de la diagonale principale doivent être nuls).
Une matrice *diagonale* – matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls exceptés ceux de sa diagonale principale : (a_{ij}) diagonale si $a_{ij} \begin{cases} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \in \mathbb{R} \text{ si } i = j \end{cases}$ – est toujours symétrique.

1.b. Produit Matriciel

Définition 7.6 (Produit de matrices) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ une matrice de taille $n \times m$ et soit $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant p}$ une matrice de taille $m \times p$. Le produit de A par B est la matrice $C = AB = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ de taille $n \times p$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.

Exemple 3 – Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, on a une matrice AB de dimension $(2 \times \cancel{3})(\cancel{3} \times 2) = (2 \times 2)$ tandis que BA est une matrice de dimension $(3 \times \cancel{2})(\cancel{2} \times 3) = (3 \times 3)$.
Généralement on dispose les matrices à multiplier à gauche (pour la 1re) et au-dessus (pour la 2e) de la matrice produit, de façon à déterminer c_{ij}, le produit de la ligne i par la colonne j.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times1+2\times3+3\times5 & 1\times2+2\times4+3\times6 \\ 4\times1+5\times3+6\times5 & 4\times2+5\times4+6\times6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times1+2\times4 & 1\times2+2\times5 & 1\times3+2\times6 \\ 3\times1+4\times4 & 3\times2+4\times5 & 3\times3+4\times6 \\ 5\times1+6\times4 & 5\times2+6\times5 & 5\times3+6\times6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarques :

- Le produit des matrices n'est pas commutatif en général. On l'a vu dans l'exemple ci-dessus où les matrices AB et BA n'avaient même pas les mêmes dimensions. Pour des matrices carrées, le produit n'est généralement pas commutatif non plus.
- Si le produit de deux matrices est la matrice nulle O, cela ne signifie pas que l'une des matrices est nulle. Il suffit pour s'en convaincre d'effectuer le produit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: on trouve O et pourtant aucune de ces matrices n'est nulle.
- La matrice *identité* de taille n – notée I_n – est une matrice diagonale dont les coefficients non nuls valent 1 : $I_n = (a_{ij})$ avec $a_{ij} \begin{cases} = 0 \text{ si } i \neq j \\ = 1 \text{ si } i = j \end{cases}$
  Les produits I_nA et AI_m restituent intégralement une matrice A de dimension $n \times m$ et pour une matrice carrée de dimension $n \times n$, on a $I_nA = AI_n = A$.

Propriété 7.3 Associativité :$\forall (A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}), A(BC) = (AB)C$
Distributivité à droite :$\forall (A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R}), (A + B)C = AC + BC$
Distributivité à gauche :$\forall (A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R}), A(B + C) = AB + AC$
Associativité mixte : $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}, A(kB) = (kA)B = k(AB)$
Élément neutre : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R}), I_nA = AI_m = A$ et $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), I_nA = AI_n = A$

DÉMONSTRATION Ces propriétés découlent des règles du produit matriciel, du produit d'une matrice par un réel, de l'addition matricielle ainsi que des règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

Remarques :

- On peut définir le carré, le cube, etc. d'une matrice carrée $A^n = \overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{n \text{ fois}}$, mais pas d'une matrice de dimension $n \times m$ lorsque $n \neq m$. Quelle que soit la dimension d'une matrice carrée, on a toujours $A^1 = A$ et par convention $A^0 = I$. Avec la matrice identité, on a $I^n = I$.
- Une matrice carrée A est *nilpotente* s'il existe un entier $n > 1$ tel que $A^n = O$, on dit alors que n est l'indice de nilpotence. Par exemple la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 2 car $I^2 = O$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 3 car $M^3 = O$.
- À cause de la non-commutativité du produit matriciel, les identités remarquables ne se transposent pas directement aux matrices. En effet $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$ et $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$ mais aucune de ces expressions n'est égale, en général, à $A^2 - B^2$. De même pour les autres identités connues.

Programmation :
En Python, les matrices sont des listes de listes.
La bibliothèque `numpy` (abréviation de *numerical python*) contient toutes les fonctions utiles avec les matrices. Pour effectuer un produit de matrices : importer la bibliothèque, déclarer les matrices et utiliser le symbole `@`. Ci-dessous, je vérifie mes calculs précédents à l'aide de cette opération `numpy`.

```
import numpy as np
A=np.array([[1,2,3],[4,5,6]])
B=np.array([[1,2],[3,4],[5,6]])
print(A@B)
print(B@A)
C=np.array([[3,9,-9],[2,0,0],[3,3,-3]])
print("carré :")
print(C@C)
print("cube :")
print(C@C@C)
```

```
[[22 28]
 [49 64]]
[[ 9 12 15]
 [19 26 33]
 [29 40 51]]
carré :
[[  0   0   0]
 [  6  18 -18]
 [  6  18 -18]]
cube :
[[0 0 0]
 [0 0 0]
 [0 0 0]]
```

Programmer en Python le produit de deux matrices est bien sûr possible sans `numpy` : il suffit de traduire la définition en algorithme. La fonction `produit(A,B)` ci-dessous effectue cela.

```
def produit(A,B):
    na,pa=len(A),len(A[0])
    nb,pb=len(B),len(B[0])
    if pa!=nb:
        print("dimensions incompatibles")
        return
    C=[pb*[0] for _ in range(na)]
    for lig in range(na) :
        for col in range(pb) :
            for elt in range(nb) :
                C[lig][col]+=A[lig][elt]*B[elt][col]
    return C

A=[[1,2,3],[4,5,6]]
B=[[1,2],[3,4],[5,6]]
print(produit(A,B))
print(produit(B,A))
print("")
C=[[3,9,-9],[2,0,0],[3,3,-3]]
print("carré :",produit(C,C))
print("cube :",produit(produit(C,C),C))
```

```
[[22, 28], [49, 64]]
[[9, 12, 15], [19, 26, 33], [29, 40, 51]]

carré : [[0, 0, 0], [6, 18, -18], [6, 18, -18]]
cube : [[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]]
```

1.c. Matrices Inversibles

Définition 7.7 (Matrice inversible) Soit A une matrice carrée de taille n.
On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$.
Si A est inversible, la matrice inverse de A est unique, on la note A^{-1}.

Remarques :

- Toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles.
  La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car il faudrait trouver $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui est impossible.
  De même, la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
- L'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n s'appelle le *groupe linéaire* de degré n et est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ car elle est inversible. Son inverse est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice I_n est sa propre inverse, c'est d'ailleurs la seule matrice à avoir cette propriété dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par contre, pour toute matrice inversible $(A^{-1})^{-1} = A$, l'inversion est .
- Justification de l'unicité de l'inverse : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède deux inverses X et Y, on a $AX = XA = I_n$ et $AY = YA = I_n$ d'où $X = XI_n = X(AY) = (XA)Y = I_nY = Y$.

Propriété 7.4 (Groupe Linéaire) $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), .)$, l'ensemble des matrices inversibles de taille n doté de l'opération . (la multiplication matricielle) est un groupe non commutatif.

- Loi de composition interne : $\forall (A, B) \in \mathrm{GL}_n^2(\mathbb{R}), AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Associativité : $\forall (A, B, C) \in \mathrm{GL}_n^3(\mathbb{R}), (AB)C = A(BC)$
- Élément neutre : $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), I_nA = AI_n = A$
- Élément symétrique : $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \exists A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Démonstration Inverse de AB :
D'après l'associativité dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

Propriété 7.5 Deux propriétés liées aux matrices inversibles :
$\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall (B, C) \in \mathscr{M}_{n,p}^2(\mathbb{R}), AB = AC \Longrightarrow B = C$
$\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = B \iff X = A^{-1}B$

Démonstration ➠ Simplification par $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:
D'après la distributivité dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $AB = AC \Longrightarrow A(B - C) = O$ et,
comme A est inversible $A(B - C) = O \Longrightarrow A^{-1}A(B - C) = A^{-1}O \Longrightarrow B - C = O$.
Attention : on l'a dit, cette propriété n'est pas valable si $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$!

➠ Équation matricielle :
Rappel : $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonne de taille n.
Existence : Comme A est inversible $AX = B \iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$
Unicité : supposons que l'équation $AX = B$ a deux solutions X_1 et X_2.
On a alors $AX_1 = AX_2$ mais comme A est inversible, d'après la propriété précédente $X_1 = X_2$.

Exemple 4 – La solution de l'équation $AX = B$ fournit une méthode pour déterminer A^{-1} :
Supposons qu'on cherche à inverser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Écrivons que le produit de A avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ égale la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 3x + 4y = b \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 6y = 3a \\ 3x + 4y = b \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = 3a - b \\ 3x = b - 4y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}a + \dfrac{-1}{2}b \\ x = \dfrac{1}{3}(b - 4y) \end{cases}$$

On en déduit $x = \frac{1}{3}\left(b - \frac{4\times 3}{2}a + \frac{4\times 1}{2}b\right) = -2a + b$

d'où $\begin{cases} x = -2a + b \\ y = \dfrac{3}{2}a + \dfrac{-1}{2}b \end{cases}$ et finalement $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

Vérification : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Propriété 7.6 (Inverse d'une matrice carrée de taille 2) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
A est inversible si et seulement si son déterminant $\Delta = \det(A) = ad - bc$ n'est pas nul :
$\Delta \neq 0 \iff A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Démonstration Appliquons la méthode précédente pour déterminer la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui vérifie l'équation $AX = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} ax + by = x' \\ cx + dy = y' \end{cases} \iff \begin{cases} acx + bcy = cx' \\ acx + ady = ay' \end{cases} \iff \begin{cases} (ad - bc)y = ay' - cx' \\ ax = x' - by \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{1}{\Delta}(ay' - cx') \\ x = \dfrac{1}{a}(x' - by) \end{cases}$$

On en déduit $x = \frac{1}{a}\left(x' - \frac{b}{\Delta}(ay' - cx')\right) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{ad-bc}{a}x' + \frac{-b}{a}(ay' - cx')\right) = \frac{1}{\Delta}(dx' - by')$

d'où $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\Delta}(dx' - by') \\ y = \dfrac{1}{\Delta}(-cx' + ay') \end{cases}$ et finalement $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Propriété 7.7 (Inverse d'une matrice diagonale) Une matrice diagonale $A = (d_{ij})$ de taille n est inversible si et seulement si tous les coefficients de sa diagonale principale sont non nuls :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, d_{ij} \neq 0 \text{ si } i = j \iff A^{-1} = (d'_{ij}) \text{ avec } d'_{ij} = \frac{1}{d_{ij}} \text{ si } i = j$

Démonstration Résolvons l'équation $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$:

$\begin{cases} d_1x_1 = a_1 \\ d_2x_2 = a_2 \\ \dots \\ d_nx_n = a_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{d_1}a_1 \\ x_2 = \dfrac{1}{d_2}a_2 \\ \dots \\ x_n = \dfrac{1}{d_n}a_n \end{cases}$. On en déduit finalement $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$.

Exemple 5 (Inversion d'une matrice carrée) – Pour les matrices carrées d'ordre $n > 2$, dans le cas d'une matrice non diagonale, on peut généraliser et simplifier la méthode vue dans l'exemple 4 : au lieu de résoudre explicitement le système correspondant à l'équation $AX = B$, on travaille [1] directement par combinaison des lignes d'une matrice (AB) de dimension $n \times (n+1)$ (la matrice A à laquelle on a ajouté la matrice colonne B) pour obtenir une matrice $(A'B')$ correspondant à un système $A'X = B'$ équivalent à celui de départ.

Illustrons cette méthode en inversant la matrice 3×3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Notre matrice (AB) est donc la matrice à 3 lignes et 4 colonnes $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & a \\ 3 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}$

Effectuons $L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \longrightarrow L_3 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & a \\ 0 & -5 & -6 & b-3a \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{pmatrix}$

Effectuons $L_2 \longrightarrow -L_3$ et $L_3 \longrightarrow L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-c \\ 0 & -5 & -6 & b-3a \end{pmatrix}$

Effectuons $L_3 \longrightarrow L_3 + 5L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-c \\ 0 & 0 & -1 & b+2a-5c \end{pmatrix}$

Effectuons $L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_3$ et $L_2 \longrightarrow L_2 + L_3$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5a+2b-10c \\ 0 & 1 & 0 & 3a+b-6c \\ 0 & 0 & -1 & 2a+b-5c \end{pmatrix}$

Effectuons $L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a+2c \\ 0 & 1 & 0 & 3a+b-6c \\ 0 & 0 & -1 & 2a+b-5c \end{pmatrix}$

Donc l'équation $AX = B \Longleftrightarrow A'X = B'$ admet pour unique solution $\begin{pmatrix} -a+2c \\ 3a+b-6c \\ -2a-b+5c \end{pmatrix}$

On en déduit la matrice inverse de A : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Remarquons que cette méthode se prête bien à la programmation.
Pour ne pas surcharger ce cours, je laisse l'écriture de ce programme au lecteur motivé.
Si on veut (et qu'on peut) utiliser la bibliothèque `numpy`, l'inversion d'une matrice `A` est immédiate avec la fonction `linalg.inv(A)`. J'utiliserai ce moyen ici pour vérifier mes résultats.

```
import numpy as np
A=np.array([[1,2,2],[3,1,0],[1,1,1]])
B=np.array([[1,2],[3,4]])
if np.linalg.det(A)!=0 : print(np.linalg.inv(A))
if np.linalg.det(A)!=0 : print(np.linalg.inv(B))
```

```
[[-1.  0.  2.]
 [ 3.  1. -6.]
 [-2. -1.  5.]]
[[-2.   1. ]
 [ 1.5 -0.5]]
```

Vous remarquerez que les matrices initiales ne contiennent que des entiers alors que les matrices inverses sont données en nombres flottants : les formules utilisées contenant des divisions, la conversion est systématique ... même si le résultat est un entier.
Pour éviter une erreur avec `numpy` si la matrice n'est pas inversible, tester le déterminant (`linalg.det(A)`) qui doit toujours être non nul.

1. Les opérations valides sont de trois types : ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne ; multiplier une ligne par un coefficient non nul ; intervertir deux lignes. L'idée est de faire apparaitre des zéros en-dessous de la diagonale principale de A puis en-dessus de cette diagonale afin de ne garder des coefficients non nuls que sur la diagonale.

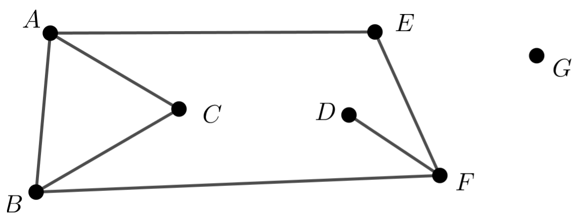
2. Typologie des Graphes

2.a. Graphes non orientés

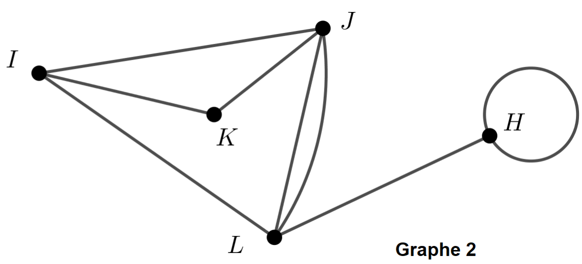
Les graphes sont des modèles abstraits qui représentent des réseaux reliant entre eux des objets.

> DÉFINITION 7.8 (GRAPHE) Un graphe est constitué de *sommets* reliés ou non par des *arêtes*.
> Deux sommets reliés par une arête sont dits *adjacents* ; non reliés, ils sont *indépendants*.
> L'*ordre* d'un graphe est son nombre de sommets ; la *taille* du graphe est son nombre d'arêtes.
> Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
> Une *boucle* est une arête joignant un sommet à lui-même (augmente de 2 le degré du sommet).
> Si les arêtes d'un graphe peuvent être parcourues dans les deux sens, le graphe est *non orienté*.
> Un graphe est *simple* s'il est non orienté, fini, sans boucle ni arête multiple entre deux sommets.

EXEMPLE 6 – Le graphe 1 est un graphe simple d'ordre 7 (7 sommets) et de taille 7 (7 arêtes).
Les degrés des sommets vont de 0 (le sommet G est isolé) à 3 (sommets A, B et F), deux sommets sont de degré 2 (C et E). Le sommet D est le seul de degré 1.
La somme des degrés est $0+1+2\times2+3\times3=14$, soit 2 fois l'ordre du graphe.



Graphe 1



Graphe 2

Le graphe 2 n'est pas un graphe simple à cause de la boucle reliant le sommet H à lui-même et aussi l'arête double reliant les sommets L et J. L'ordre de ce graphe est 5 et sa taille 8.

Pour ces graphes on peut dresser une table des degrés :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	3	2	1	2	3	0

Sommet	H	I	J	K	L
Degré	3	3	4	2	4

On peut aussi établir leur matrice d'adjacence $M=(m_{ij})$ où le coefficient m_{ij} indique le nombre d'arêtes reliant les sommets d'indices i et j. Chaque sommet étant représenté par une ligne et une colonne de même indice, pour un graphe non orienté cette matrice est nécessairement symétrique.
Afin de clarifier la correspondance entre le nom (ici une lettre) du sommet et l'indice dans la matrice d'adjacence, on peut accompagner les lignes et colonnes de cette matrice par une entête indiquant les noms des sommets :

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M_2 = \begin{array}{c} \\ H \\ I \\ J \\ K \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} H & I & J & K & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

> DÉFINITION 7.9 (MATRICE D'ADJACENCE) Soit un graphe et ses sommets numérotés de 1 à n.
> La matrice d'adjacence associée à ce graphe d'ordre n est une matrice carrée $M=(m_{ij})$ de même dimension où le coefficient m_{ij} donne le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.

<u>**Remarques**</u> :

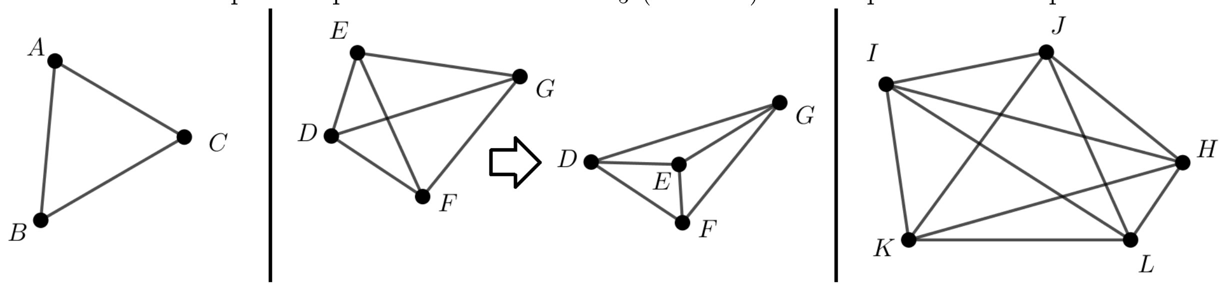
- La matrice d'adjacence associée à un graphe non-orienté est symétrique.
  Celle d'un graphe simple ne contient que des 0 et des 1.
- Dans un graphe non orienté la somme des degrés est un nombre pair (c'est le double du nombre d'arêtes) ; on en déduit que le nombre de sommets d'ordre impair est un nombre pair (sinon il y aurait un nombre impair de degrés).

DÉFINITION 7.10 (GRAPHE COMPLET, GRAPHE PLANAIRE) Un graphe simple est

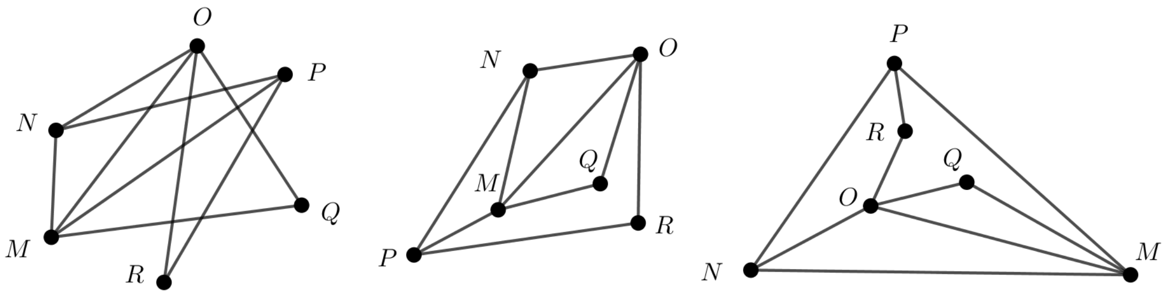
- *complet* si tous ses sommets sont adjacents. On note K_n un graphe complet à n sommets.
- *planaire* si on peut tracer ses arêtes sur un plan par des segments qui ne se croisent pas.

<u>**Remarques**</u> :

- K_3 (à gauche) est un graphe complet et planaire.
  K_4 (au centre) est complet. Bien qu'il semble non planaire, si on replace un de ses sommets au centre on constate qu'il est planaire. Par contre K_5 (à droite) est complet mais non planaire.



- Ce n'est pas forcément évident de décider si un graphe est planaire ou pas.
  En effet, les sommets peuvent être déplacés, les arêtes déformées, ce qui crée ou enlève des croisements.
  Ci-dessous, j'ai dessiné trois versions du même graphe planaire, mais la version de gauche comporte six croisements ce qui pourrait faire penser qu'il n'est pas planaire. Les deux versions de droite ne se ressemblent pas, mais montrent que ce graphe peut être dessiné sans croisement : il est donc planaire.



DÉFINITION 7.11 (CHAÎNES D'UN GRAPHE) Une *chaîne* est une suite finie de sommets adjacents constituant un chemin entre les deux sommets situés aux extrémités.
Une chaîne est *eulérienne* si elle passe une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe.
Une chaîne est *hamiltonienne* si elle passe une fois et une seule par tous les sommets du graphe.
Une chaîne est *fermée* si ses deux extrémités sont identiques.
Une chaîne fermée est un *cycle* si toutes ses arêtes sont différentes.
Connexité d'un graphe :

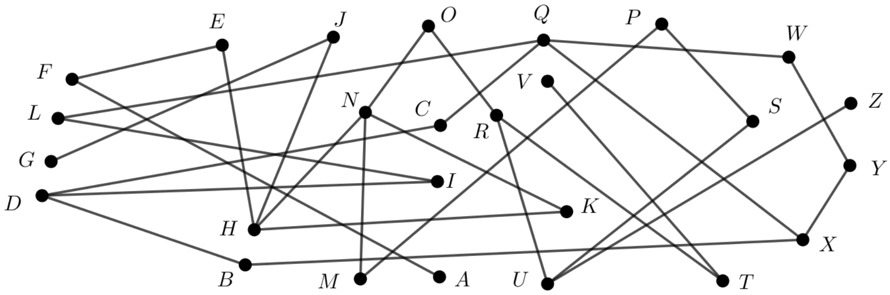
- Un graphe est *connexe* si entre deux sommets quelconques existe au moins une chaîne.
- Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle ; un sommet de degré 1 est une *feuille*.

Caractéristiques métriques d'une chaîne ou d'un graphe :

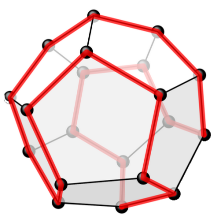
- La *longueur* d'une chaîne est le nombre de ses arêtes.
- La *distance* entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.
- Le *diamètre* d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.

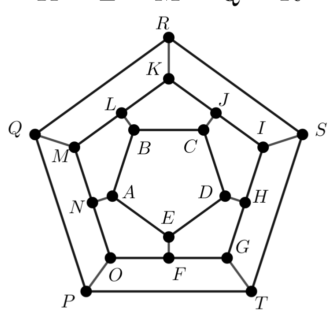
Remarques :

- Un cycle peut passer plusieurs fois par le même sommet. Sur le graphe planaire ci-dessus, le cycle $O-Q-M-O-N-M-O$ passe deux fois par le point O. Par contre la chaîne fermée $N-O-M-N-P-M-N$ n'est pas un cycle car elle passe deux fois par l'arête $M-N$.
- Tous les graphes donnés en exemple sont connexes excepté le graphe 1 qui possède un sommet isolé (G) : aucune chaîne ne permet de joindre ce sommet aux autres sommets du graphe.
  La connexité d'un graphe n'est pas toujours aussi facile à mettre en évidence. Ci-dessous j'ai dessiné un graphe non connexe mais cela est t-il si évident ? Combien de composantes (sous-graphe) connexes y discernez-vous ? (solution en fin de chapitre)

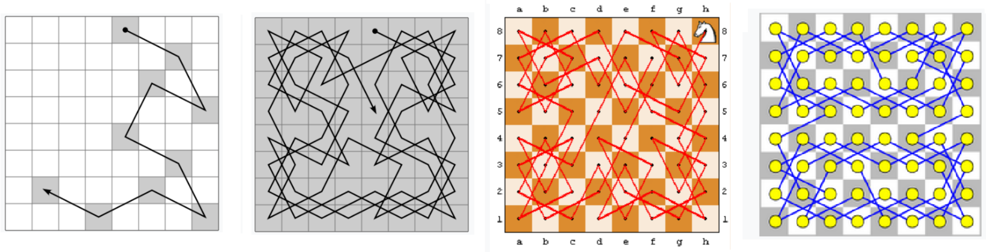


- Un cycle *eulérien* passe une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe avec, à la fin, un retour au point de départ. Le problème initial posé à Euler à propos des sept ponts de Königsberg portait sur l'existence d'un tel chemin. Sa réponse négative était accompagnée d'une propriété générale (appelée *théorème de Euler*) : pour qu'un cycle eulérien existe, il suffit que tous ses sommets aient un degré pair supérieur ou égal à 2. Le graphe complet K_5 a tous ses sommets de degré 4 : le cycle $L-H-J-I-K-L-J-K-H-I-L$ par exemple qu'il contient est eulérien. Ce cycle n'est pas hamiltonien car il passe deux fois par chaque sommet.
- La connexité d'un graphe est une condition nécessaire pour qu'existe un cycle eulérien. Pour qu'existe une chaîne eulérienne (pas nécessairement fermée) il faut et il suffit qu'il soit connexe et que ses sommets d'ordre impair soient au nombre de 0 ou de 2. Ce n'est pas le cas pour le graphe des ponts de Königsberg (les sommets sont d'ordre 3 ou 5) donc il n'existe pas de chaîne eulérienne pour ce graphe. Le graphe planaire ci-dessus (deux sommets sont d'ordre 3, les autres sont d'ordre 2 ou 4) ne contient aucun cycle eulérien mais il possède au moins une chaîne eulérienne. Pour la trouver, il faut nécessairement partir d'un sommet d'ordre 3 et arriver de même : $N-M-Q-O-N-P-M-O-R-P$.
- Sur le graphe K_5 (ci-dessus), la chaîne $L-H-J-I-K-L$ est un cycle hamiltonien mais n'est évidemment pas une chaîne eulérienne. La recherche de cycles hamiltoniens dans un graphe remonte à Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) qui s'interrogeait sur l'existence d'un tel cycle entre les sommets d'un dodécaèdre, les arêtes de ce solide étant les arêtes du graphe. Ci-dessous le problème dans l'espace et sur un graphe planaire qui le représente : la chaîne $A-B-C-D-E-F-G-H-I-J-K-L-M-N-O-P-Q-R-S-T$ est hamiltonienne mais ce n'est pas un cycle.
  Le cycle hamiltonien coloré en rouge sur les arêtes du dodécaèdre est $A-B-C-D-E-F-G-H-I-J-K-L-M-Q-R-S-T-P-O-N-A$.

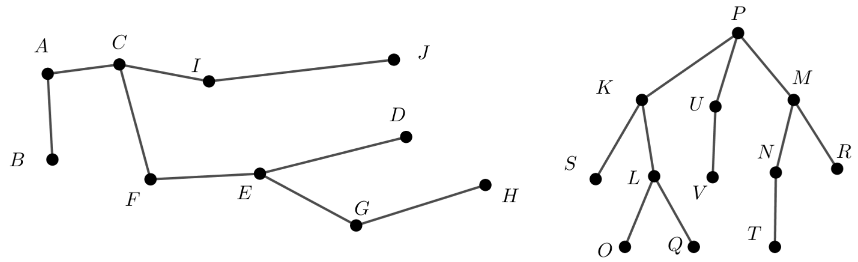




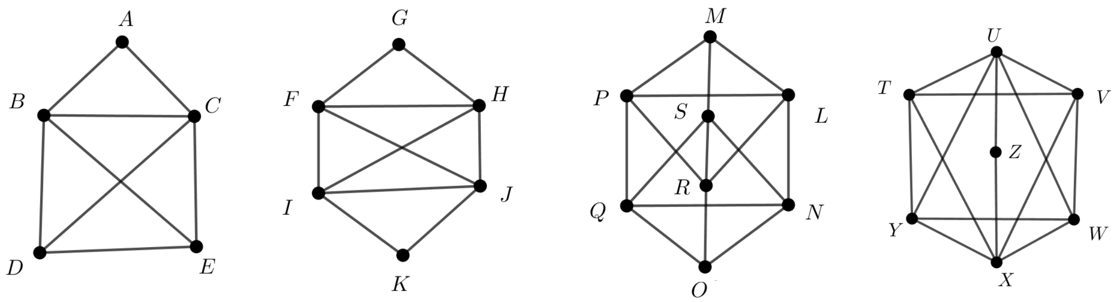
Le problème de l'échiquier, mentionné par le poète indien Rudrata au IX^e siècle, est un autre exemple – plus difficile – de ce type de recherche : il s'agit de couvrir les 64 cases d'un échiquier par une chaîne ou, mieux, un cycle hamiltonien décrit par le déplacement d'un cavalier, celui-ci se déplaçant en « L » aux échecs (2 cases dans une direction et 1 perpendiculairement). La figure du centre-droit montre le chaîne hamiltonienne de al-Adli ar-Rumi (vers 840) ; celle de droite montre le cycle hamiltonien symétrique par rapport au centre de l'échiquier proposé par Euler en 1759.



- Un arbre a toujours un sommet de plus que le nombre d'arêtes : ainsi l'arbre de gauche contient 9 arêtes et 10 sommets. On peut toujours aller d'un sommet à un autre (connexité) mais pour revenir à un sommet déjà visité il faut rebrousser chemin (acyclicité).
On désigne parfois un des sommets comme étant la *racine* de l'arbre, ce qui conduit à une description du graphe en termes de généalogie : l'arbre de droite a été dessiné de manière à identifier le sommet P comme racine ; du coup, on parlera de la descendance (ou de l'ascendance) d'un des sommets. Le sommet K a deux fils (S et L) mais un seul père (P).



Exemple 7 – La recherche d'un cycle eulérien ou d'une chaîne eulérienne est un jeu bien connu. Sans connaître la condition nécessaire et suffisante à son existence, le joueur peut avoir un peu de mal à les détecter. Les trois graphes ci-dessous permette d'apprécier cette difficulté, relative mais croissante généralement avec le nombre de sommets.



➠ Le graphe de gauche contient une chaîne eulérienne partant de D et arrivant à E (ou l'inverse, il n'y a pas d'ordre ici) mais pas de cycle eulérien car il y a deux sommets d'ordre impair.
Il y a la chaîne $D-B-A-C-D-E-B-C-E$, y en a t-il d'autres partant de D ?

➠ Le graphe du centre-gauche a tous ses sommets d'ordre pair. Il doit donc contenir au moins un cycle eulérien. Je vais me baser sur le graphe précédent auquel on a juste ajouté un sommet en-dessous qui permet de revenir au point de départ :
$I-F-G-H-I-J-F-H-J-K-I$ est un cycle eulérien.

➠ Le graphe du centre-droit possède deux sommets d'ordre impair (3) et six sommets d'ordre pair (4). Comme celui de gauche, il doit contenir une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien. En partant de M on doit arriver à O. La question est laissée en suspens (solution en fin de chapitre).

➠ Le graphe de droite a deux sommets d'ordre impair (5) et cinq sommets d'ordre pair (2 ou 4). Déterminer une chaîne eulérienne partant de U et arrivant à X (solution en fin de chapitre).

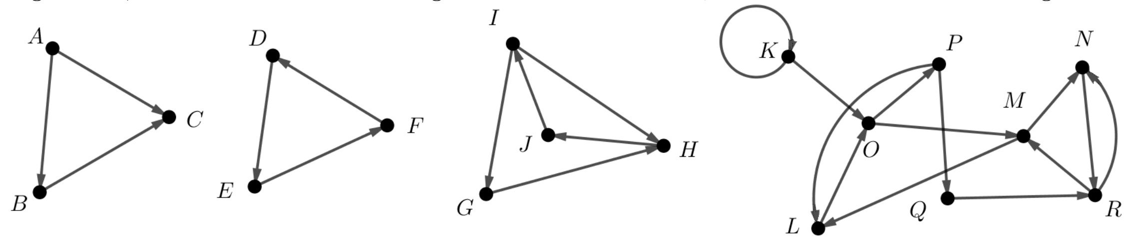
2.b. Graphes orientés

Les graphes non orientés ne suffisent pas toujours à rendre compte du problème qu'ils représentent.

Définition 7.12 (Orientation) Un graphe orienté est constitué d'arêtes orientées (appelées *arcs*) qu'on ne peut parcourir que dans un seul sens.
Un arc orienté a un sommet de départ (appelé *origine*) et un sommet d'arrivée (appelée *extrémité*).

Remarques :

- De même que pour les graphes non orienté, on définit : une boucle orientée, une chaîne orientée, un cycle orienté, un graphe complet orienté, etc. Voici, à gauche, les deux seuls graphes complets orienté d'ordre 3 (les noms étant interchangeables) et, à droite, un graphe complet orienté d'ordre 4 et un graphe orienté connexe d'ordre 8.
  On remarque que le sommet K ne peut être atteint ; du coup on dira de ce graphe qu'il a une connexité *faible*, mais le sous-graphe (L, M, N, O, P, Q, R) en est une composante fortement connexe (connexité *forte* : tous les sommets peuvent être atteints).
  Il existe une boucle et de nombreux cycles orientés dans ce graphe, comme $R - N - R$ de longueur 2, $L - O - M - L$ de longueur 3 ou $O - P - Q - R - M - L - O$ de longueur 6.



- Dans la matrice d'adjacence $M = (m_{ij})$ associée à un graphe orienté, le coefficient m_{ij} donne le nombre d'arcs d'origine i et d'extrémité j. Ces matrices ne sont plus symétriques comme celles des graphes non orientés. Voici les quatre matrices associées aux graphes ci-dessus :

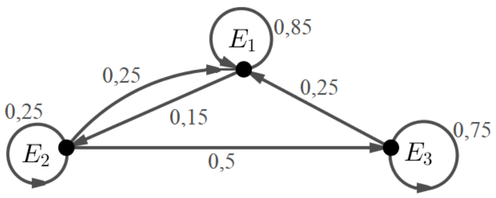
$$\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ D\\ E\\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} D & E & F \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ G\\ H\\ I\\ J \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} G & H & I & J \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ K\\ L\\ M\\ N\\ O\\ P\\ Q\\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} K & L & M & N & O & P & Q & R \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

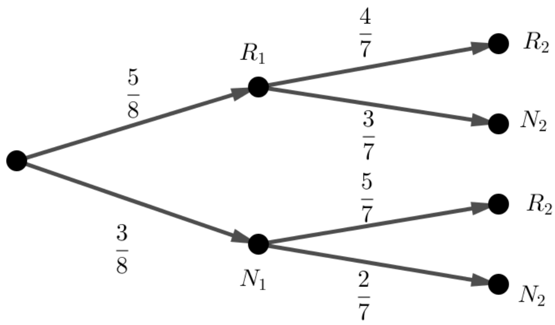
Définition 7.13 (Pondération) Un graphe *étiqueté* est un graphe dont les arêtes sont affectées à des étiquettes appartenant à un même ensemble (mots, nombres, symboles, couleurs, etc.)
Si les étiquettes d'un graphe sont des nombres positifs (des « poids ») on parle de graphe *pondéré*.
Un graphe *probabiliste* est un graphe orienté et pondéré tel que la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet est égale à 1.

Remarques :

- Un graphe pondéré peut être orienté ou non orienté. De nombreux problèmes liés à ce type de graphe sont résolus à l'aide d'algorithmes. Le célèbre problème du voyageur de commerce en est un exemple : il s'agit de visiter un certain nombre de villes (une fois et une seule) et de revenir au point de départ par le chemin le plus court. L'itinéraire optimum est le cycle de poids minimum. Malheureusement, si le nombre de villes à visiter est trop grand un algorithme d'exploration systématique qui examine chaque itinéraire prendra trop de temps (pour n villes il y en a $\frac{(n-1)!}{2}$ à examiner, pour 10 villes cela fait déjà 181 400). Il existe cependant des algorithmes d'optimisation qui fournissent une solution approchée (ACO).

- Le poids d'une chaîne d'un graphe pondéré est la somme des poids de ses arêtes.
  Dans une application, ces poids peuvent être des longueurs (réseau autoroutier), dans une autre ce peut-être des coûts ou des durées (tâches à réaliser). Dans tous les cas, la *plus courte* chaîne qui relie deux sommets est celle de poids minimum.
- Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un système pouvant changer aléatoirement d'état : les sommets du graphe sont les états possibles et le poids d'une arête menant de l'état E_i à l'état E_j est la probabilité de transition $P(E_iE_j)$.
  Voici, à gauche, un exemple où le système évolue entre trois états et, à droite, la représentation déjà bien connue d'un tirage sans remise de deux boules successivement d'une urne contenant au départ 5 boules rouges et 3 noires :





  Voici maintenant la matrice de transition M du graphe de gauche ainsi que deux puissances de cette matrice (M^2 et M^{10}) dont on va voir l'utilité (probabilités arrondies au centième). La matrice de transition du graphe de droite n'a pas grand intérêt car cet arbre ne peut qu'être descendu (par ailleurs il faudrait renommer les sommets qui portent actuellement des noms ambigus).

$$M = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,00 \\ 0,25 & 0,25 & 0,50 \\ 0,25 & 0,00 & 0,75 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,76 & 0,16 & 0,07 \\ 0,40 & 0,10 & 0,50 \\ 0,40 & 0,04 & 0,56 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M^{10} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,63 & 0,13 & 0,25 \\ 0,62 & 0,12 & 0,25 \\ 0,62 & 0,12 & 0,25 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Matrices d'adjacence

3.a. Puissances d'une matrice d'adjacence

À partir d'un graphe on peut écrire sa matrice d'adjacence et, inversement, une matrice d'adjacence permet de reconstituer le graphe sous-jacent. Quel est l'intérêt de la matrice d'adjacence $M = (m_{ij})$? Le coefficient m_{ij} permet de savoir combien il y a de chemins permettant d'aller du sommet i au sommet j en 1 coup. On va voir que les puissances de cette matrice conserve cette propriété.

Propriété 7.8 (Nombre de chemins) Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe.
Les coefficients $m_{ij}(n)$ de la matrice M^n (puissance n^e de M) correspondent au nombre de chemins permettant d'aller du sommet i au sommet j en n coups.

Démonstration On suppose une matrice d'adjacence M de dimension N et on fait une récurrence sur le nombre de coups n :

- On l'a rappelé pour $n = 1$: par définition de la matrice d'adjacence, le coefficient m_{ij} permet de savoir combien il y a de chemins permettant d'aller du sommet i au sommet j en 1 coup.
- Supposons que les coefficients $m_{ij}(n)$ de la matrice M^n correspondent au nombre de chemins permettant d'aller du sommet i au sommet j en n coups, et calculons le nombre de chemins permettant d'aller du sommet i au sommet j en $n+1$ coups.
  Pour aller du sommet i au sommet j en $(n+1)^e$ coup, il faut atteindre le sommet k au n^e coup, avec $k \in [\![1; N]\!]$, et ensuite aller de k à j. D'après l'hypothèse de récurrence il y a $m_{ik}(n)$ chemins permettant d'atteindre le sommet k en n coups et, ensuite, il y a

$m_{kj}(1) = m_{kj}$ chemins allant de k à j. Il y a donc en tout $m_{ik}(n) \times m_{kj}$ chemins permettant d'atteindre j en $n+1$ coups en passant par k au coup précédent.
Comme on veut totaliser ces chemins, il y en a $\sum_{k=1}^{n} m_{kj}(1) \times m_{kj}$ ce qui est exactement la formule pour calculer le coefficient $m_{ij}(n+1)$ de la matrice M^{n+1}.

Conclusion : Pour $n \geqslant 1$, les coefficients $m_{ij}(n)$ de la matrice M^n donnent le nombre de chemins permettant d'aller du sommet i au sommet j en n coups.

Remarques :

- Prenons l'exemple du graphe orienté complet d'ordre 4 ci-dessus (G, H, I, J). On peut facilement compter les chemins allant d'un sommet à l'autre en 2 ou 3 coups et vérifier que les nombres trouvés correspondent bien aux coefficients des matrices M^2 et M^3.

$$M = \begin{array}{c} \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} G & H & I & J \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M^2 = \begin{array}{c} \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} G & H & I & J \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M^3 = \begin{array}{c} \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} G & H & I & J \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

  Par contre, c'est très fastidieux de compter les chemins allant d'un sommet à l'autre en 10 coups et quasiment inhumain de faire ce dénombrement pour 100 coups. À cette fin, on utilisera les matrices M^{10} et M^{100} calculées à l'aide de notre petit programme.

$$M^{10} = \begin{array}{c} \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} G & H & I & J \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M^{100} = \begin{array}{c} \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} G & H & I & J \end{array} \\ \begin{pmatrix} 73\,237\,462 & 133\,231\,279 & 89\,404\,037 & 109\,139\,117 \\ 89\,404\,037 & 162\,641\,499 & 109\,139\,117 & 133\,231\,279 \\ 133\,231\,279 & 242\,370\,396 & 162\,641\,499 & 198\,543\,154 \\ 109\,139\,117 & 198\,543\,154 & 133\,231\,279 & 162\,641\,499 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Pour un graphe de grande taille, pas besoin d'aller au delà du 2[e] coup pour apprécier l'intérêt des matrices M^n afin de dénombrer les chemins permettant d'atteindre un des sommets en n coups. Voici les matrices M^3 et M^{20} dans le cas du graphe orienté d'ordre 8 ci-dessus.

$$M^3 = \begin{array}{c} \\ K \\ L \\ M \\ N \\ O \\ P \\ Q \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} K & L & M & N & O & P & Q & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M^{20} = \begin{array}{c} \\ K \\ L \\ N \\ N \\ O \\ P \\ Q \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} K & L & M & N & O & P & Q & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2\,504 & 3\,205 & 3\,819 & 1\,579 & 1\,235 & 655 & 2\,772 \\ 0 & 926 & 926 & 926 & 926 & 926 & 926 & 926 \\ 0 & 926 & 1\,356 & 1\,468 & 344 & 580 & 234 & 802 \\ 0 & 745 & 1\,314 & 1\,424 & 968 & 463 & 172 & 1\,369 \\ 0 & 851 & 981 & 1\,215 & 401 & 388 & 229 & 794 \\ 0 & 1\,936 & 1\,146 & 2\,158 & 926 & 344 & 580 & 1\,702 \\ 0 & 745 & 1\,314 & 1\,424 & 968 & 463 & 172 & 1\,369 \\ 0 & 1\,369 & 1\,195 & 1\,775 & 851 & 401 & 388 & 1\,444 \end{pmatrix} \end{array}$$

PROPRIÉTÉ 7.9 (PROBABILITÉS) Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe probabiliste.
Les coefficients $m_{ij}(n)$ de la matrice M^n correspondent à la probabilité, en partant de l'état E_i, d'obtenir l'état E_j en n coups.

DÉMONSTRATION C'est la formule des probabilités totales qui permet de justifier cette propriété, toujours par récurrence sur le nombre n de coups :

- Pour $n = 1$: par définition de la matrice d'adjacence d'un graphe probabiliste, le coefficient m_{ij} permet de connaître la probabilité, en partant de l'état E_i, d'obtenir l'état E_j en 1 coup.
- Supposons que les coefficients $m_{ij}(n)$ de la matrice M^n correspondent à la probabilité, en partant de l'état E_i, d'obtenir l'état E_j en n coups, et calculons la probabilité, en partant de l'état E_i, d'obtenir l'état E_j en $n+1$ coups.
  Pour aller de l'état E_i à l'état E_j en $(n+1)^{e}$ coup, il faut atteindre l'état E_k au n^{e} coup, avec $k \in [\![1; N]\!]$ (N est la dimension de M), et ensuite aller de l'état E_k à l'état E_j. D'après l'hypothèse de récurrence la probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_k en n coups est $m_{ik}(n)$ et, ensuite, la probabilité de passer de l'état E_k à l'état E_j en 1 coup est $m_{kj}(1) = m_{kj}$. La probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_j en passant par E_k au coup précédent est donc $m_{ik}(n) \times m_{kj}$.
  La formule des probabilités totales fait la somme de toutes ces probabilités pour $k \in [\![1; N]\!]$ et

ainsi on obtient $\sum_{k=1}^{n} m_{kj}(1) \times m_{kj}$ ce qui est exactement la formule pour calculer le coefficient $m_{ij}(n+1)$ de la matrice M^{n+1}.
Ainsi on a bien montré quelle était la signification des coefficients de la matrice M^n pour $n \geqslant 1$.

Remarques :
On comprend maintenant l'utilité des puissances de la matrice de transition M du graphe probabiliste ci-dessus (celui de gauche). On constate notamment que, après 10 coups, les probabilités de chacune des lignes ont tendance à se rapprocher d'une valeur d'équilibre.
Pour confirmer cette remarque, examinons des puissances encore plus grandes de la matrice, arrondies au millième :

$$M^{20} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.625 & 0.125 & 0.250 \\ 0.625 & 0.125 & 0.250 \\ 0.625 & 0.125 & 0.250 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M^{100} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.625 & 0.125 & 0.250 \\ 0.625 & 0.125 & 0.250 \\ 0.625 & 0.125 & 0.250 \end{pmatrix} \end{array}$$

L'influence de l'état initial se perd progressivement. À l'équilibre, le système décrit par ce graphe se trouve dans $0,625 = \frac{5}{8}$, soit $62,5\%$ des cas dans l'état E_1, $0,125 = \frac{1}{8}$, soit $12,5\%$ des cas dans l'état E_2 et $0,25 = \frac{1}{4}$, soit 25% des cas dans l'état E_3.

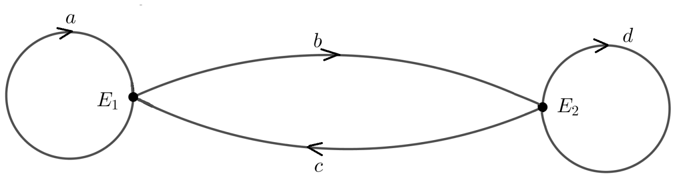
3.b. Chaîne de Markov

La notion de chaîne de Markov va préciser ce que nous avons expérimenté sur ces graphes probabilistes. Ce type d'objet est nommé en l'honneur d'Andreï Markov (1856-1922), mathématicien russe qui publia en 1906 son étude sur les processus *stochastiques* (relèvent du domaine de l'aléatoire, du calcul des probabilités) qui portent son nom aujourd'hui.

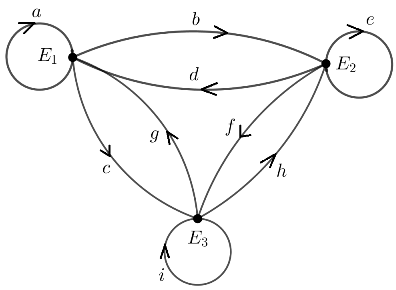
Définition 7.14 (Chaîne de Markov) Une *chaîne de Markov* à N états est une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans un espace d'états $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_N\}$ telle que pour tout $E_j \in E$, l'événement $X_{n+1} = E_j$ ne dépend que des événements de l'étape précédente (c'est-à-dire que des événements $X_n = E_i$ pour tout $E_i \in E$).

Remarques :

- Une chaîne de Markov à deux états est une séquence $X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ de variables aléatoires à valeurs dans l'espace des états $E = \{E_1, E_2\}$, la valeur X_n étant l'état du processus à l'instant n. Cette chaîne modélise un processus stochastique dont la caractéristique est que la probabilité de $X_{n+1} = E_j$ dépend uniquement des $X_n = E_i, \forall E_i \in E$. Autrement dit, elle ne dépend pas de l'instant n. Étant invariantes tout au long de l'évolution du processus, on pourra donc donner les probabilités de transition d'un état à l'autre par une unique matrice $M = (m_{ij})$ où le coefficient m_{ij} donne la probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_j.
- La distribution de probabilité d'une chaîne de Markov (X_n) à N états est une matrice-ligne qui donne les probabilités des différents états.
On note $\pi_n = (P(X_n = E_1) \ \ P(X_n = E_2) \ \ \ldots \ \ P(X_n = E_N))$ cette distribution de probabilité à l'étape n. D'après la règle de multiplication des matrices, on a $\pi_{n+1} = \pi_n M$ où M est la matrice de transition associée à la chaîne de Markov considérée ; une récurrence simple permet de déduire que l'on a $\pi_n = \pi_0 M^n$ où π_0 est la distribution initiale de probabilité.
Généralement, le système est dans un état initial E_k d'où $P(X_0 = E_k) = 1$ et les autres probabilités sont à zéro ($\forall i \in [\![1, N]\!], i \neq k \Longrightarrow P(X_0 = E_i) = 0$).
- Une chaîne de Markov à N états est associée à un graphe à N sommets, ce graphe étant complet, orienté et probabiliste. Les pondérations des arcs sont les probabilités de transition d'un état à l'autre. Ci-dessous, j'ai représenté (à gauche) de tels graphes correspondants à une chaîne de Markov à 2 états (dessus) et à 3 états (dessous). Les matrices de transition (aussi appelées matrices stochastiques) correspondantes sont à droite.

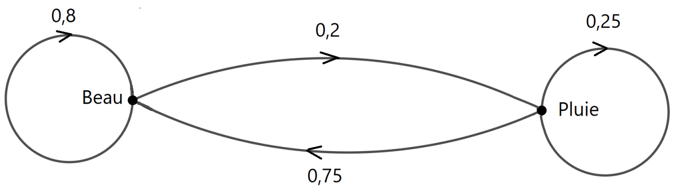


$$M = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$$



$$M = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 8 – On a observé la météo d'une région obéissait sensiblement au modèle suivant : s'il fait beau un jour il fera beau le lendemain 8 fois sur 10 et il pleuvra sinon ; par contre lorsqu'il pleut un jour, il fera beau une fois sur 4 le lendemain. Étudions ce processus stochastique en essayant de déterminer s'il fera beau dans n jours sachant qu'il fait beau aujourd'hui.
Le modèle de graphe probabiliste est le suivant avec sa matrice de transition M :



$$M = \begin{array}{c} \\ \text{Beau} \\ \text{Pluie} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Beau} & \text{Pluie} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix} \end{array}$$

L'espace des états $E = \{Beau, Pluie\}$.
La distribution de probabilité initiale est, selon l'énoncé
$\pi_0 = (P(X_0 = Beau) = 1 \;\; P(X_0 = Pluie) = 0)$.
D'après la formule des probabilités totales, on a
$P(X_1 = Beau) = P(X_0 = Beau) \times 0,8 + P(X_0 = Pluie) \times 0,75 = 1 \times 0,8 + 0 \times 0,75 = 0,8$ et
$P(X_1 = Pluie) = P(X_0 = Beau) \times 0,2 + P(X_0 = Pluie) \times 0,25 = 1 \times 0,2 + 0 \times 0,25 = 0,2$.
On aurait aussi bien obtenu cela : $\pi_1 = (P(X_1 = Beau) = 0,8 \;\; P(X_1 = Pluie) = 0,2)$ en multipliant la matrice-ligne π_0 par la matrice de transition M.
De même, on obtient
$\pi_2 = (P(X_2 = Beau) = 0,8^2 + 0,2 \times 0,75 = 0,79 \;\; P(X_2 = Pluie) = 0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,25 = 0,21)$ en multipliant la matrice-ligne π_1 par la matrice carrée de transition M ou bien en multipliant la matrice-ligne π_0 par la matrice M^2.
Ainsi de suite :
$\pi_3 = (P(X_3 = Beau) = 0,7895 \;\; P(X_3 = Pluie) = 0,21051)$,
$\pi_4 = (P(X_4 = Beau) = 0,789475 \;\; P(X_4 = Pluie) = 0,210525)$,
etc.
On constate que les probabilités se stabilisent assez rapidement, ces valeurs nous étant données par les puissances élevées de la matrice M :

$$M^4 = \begin{array}{c} \\ Beau \\ Pluie \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Beau & Pluie \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,789475 & 0,210525 \\ 0,78946875 & 0,21053125 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M^{40} = \begin{array}{c} \\ Beau \\ Pluie \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Beau & Pluie \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,7894736842105267 & 0,21052631578947378 \\ 0,7894736842105271 & 0,2105263157894739 \end{pmatrix} \end{array}$$

Essayons d'obtenir des valeurs explicitement calculables.
En notant $\pi_n = (P(X_n = Beau) = p_n \;\; P(X_n = Pluie) = q_n)$, les probabilités p_n et $q_n = 1 - p_n$ satisfont la relation de récurrence :
$p_{n+1} = p_n \times 0,8 + q_n \times 0,75 = p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,75 = p_n \times (0,8 - 0,75) + 0,75$,
soit $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,75$.
La suite (p_n) est arithmético-géométrique (voir le chapitre Suites du cours de 1^{re}).

Pour en trouver l'expression explicite cherchons le point fixe, solution de l'équation
$x = 0,05x + 0,75 \iff 0,95x = 0,75 \iff x = \frac{75}{95} = \frac{15}{19} \approx 0,7894736842$ (la valeur limite).
Posons $u_n = p_n - \frac{75}{95}$ et montrons que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,05$:
$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{75}{95} = 0,05p_n + 0,75 - \frac{75}{95} = 0,05(u_n + \frac{75}{95}) + 0,75 - \frac{75}{95} = 0,05u_n - \frac{0,95\times75}{95} + 0,75 = 0,05u_n$.
Du coup, on obtient $u_n = u_0 \times 0,05^n = (p_0 - \frac{75}{95}) \times 0,05^n = \frac{20\times0,05^n}{95} = \frac{4\times0,05^n}{19}$ (car $p_0 = 1$).
On en déduit $p_n = u_n + \frac{15}{19} = \frac{15+4\times0,05^n}{19}$ tandis que $q_n = 1 - p_n = 4 \times \frac{1-0,05^n}{19}$.
Vérifions : $p_1 = \frac{15+4\times0,05}{19} = \frac{15,2}{19} = 0,8$ - $p_2 = \frac{15+4\times0,05^2}{19} = 0,79$ - etc.
Finalement, le jour n, la distribution de probabilité de l'état météorologique de cette région est :
$\pi_n = \left(P(X_n = Beau) = \frac{15+4\times0,05^n}{19} \quad P(X_n = Pluie) = 4 \times \frac{1-0,05^n}{19}\right)$

Définition 7.15 (Distribution invariante) Une distribution de probabilité π est dite *invariante* pour une chaîne de Markov de matrice de transition M si $\pi M = \pi$.

Définition 7.16 (Matrice régulière) Une matrice M est dite *régulière* s'il existe une valeur $m \geqslant 1$ telle que M^m ne contient que des coefficients strictements positifs.

Propriété 7.10 Si une chaîne de Markov a une matrice de transition M régulière alors
- Il existe une distribution de probabilité invariante π à coefficients strictement positifs.
- La suite des distributions de probabilité (π_n) converge vers π indépendamment de π_0.
- La suite de matrices (M^n) converge vers une matrice dont toutes les lignes restituent π.

Démonstration Lorsqu'il n'y a que 2 états, on refait les calculs de notre exemple 8 :
Distribution de probabilité $\pi_n = (p_n \quad q_n)$
Matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ avec $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$.
$p_{n+1} = p_n \times (1-p) + q_n \times q = p_n \times (1-p) + (1-p_n) \times q = p_n \times (1-p-q) + q$.
La suite (p_n) est arithmético-géométrique, son point fixe est solution de l'équation :
$x = x \times (1-p-q) + q \iff (p+q)x = q \iff x = \frac{q}{p+q}$ (on a $p + q \neq 0$).
Posons $u_n = p_n - \frac{q}{p+q}$ et montrons que la suite (u_n) est géométrique de raison $(1-p-q)$:
$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{q}{p+q} = p_n \times (1-p-q) + q - \frac{q}{p+q} = u_n \times (1-p-q)$ (j'abrège).
Du coup, on obtient $u_n = u_0 \times (1-p-q)^n = (p_0 - \frac{q}{p+q}) \times (1-p-q)^n$.
On en déduit $p_n = u_n + \frac{q}{p+q} = (p_0 - \frac{q}{p+q}) \times (1-p-q)^n + \frac{q}{p+q}$
Comme $-1 < 1-p-q < 1$, on en déduit que $|1-p-q| < 1$ et donc $(1-p-q)^n$ tend vers 0 ce qui prouve que p_n tend vers $\frac{q}{p+q}$, le point fixe qui est donc la valeur limite de la suit (p_n).
De même $q_n = 1 - p_n$ tend vers $1 - \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q}$.
La distribution de probabilité π_n converge vers la distribution invariante $\pi = \left(\frac{q}{p+q} \quad \frac{p}{p+q}\right)$.
Cette propriété est admise pour plus de 2 états.

Remarques :
- La matrice probabiliste donnée en exemple dans les remarques de la définition 7.13 a deux coefficients nuls, elle est cependant régulière car la matrice M^2 ne contient que des coefficients strictement positifs. On peut en déduire qu'il existe une distribution invariante qui formera les lignes de la matrice limite de (M^n). Cette distribution invariante étant $\pi = \left(\frac{5}{8} \ \frac{1}{8} \ \frac{1}{4}\right)$, la matrice limite est $\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$.

- Pour une chaîne de Markov a matrice de transition régulière, on montre que le temps moyen du retour à l'état E_i est $m_{ii} = \frac{1}{p_i}$ où p_i est l'élément correspondant à E_i dans la distribution invariante π. Dans notre exemple 8, on a $\pi = \begin{pmatrix} \frac{15}{19} & \frac{4}{19} \end{pmatrix}$. On en déduit que le temps d'attente du beau temps (la durée de la pluie) est $\frac{19}{15} \approx 1,3$ jours alors que le temps d'attente de la pluie (la durée du beau temps) est $\frac{19}{4} \approx 4,75$ jours.

4. Suite de matrices colonnes

Définition 7.17 (Convergence) Une suite de matrices colonnes (M_n) de taille $N \times 1$ est une fonction qui a tout entier naturel n associe la matrice colonne M_n où les coefficients $m_i(n)$ sont les termes de suites numériques (m_i) pour tout $i \in [\![1, N]\!]$.
On dit que la suite de matrices colonnes (M_n) *converge* lorsque chacune des suites (m_i) converge et on note M la matrice limite constituée des limites des suites (m_i).

Remarques :

- On définit de même des suites de matrices lignes de taille $1 \times N$ ou des suites de matrices carrées de taille $N \times N$.
- La fonction U définie sur $\mathbb{N}$ par $n \longmapsto \begin{pmatrix} n-1 \\ e^{-n}-1 \\ 1-\frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$ définit une suite de matrices colonnes de taille 3×1. On a notamment $U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{e}-1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
  Deux des suites numériques utilisées ici convergent : $(e^{-n}-1)$ converge vers -1 tandis que $(1-\frac{1}{n+1})$ converge vers 1. Cependant la suite (U_n) diverge ; elle ne converge pas car la suite $(n-1)$ diverge vers $+\infty$.

Propriété 7.11 (Suites géométriques) Soit A une matrice carrée de dimension N et (M_n) une suite de matrices colonnes de taille $N \times 1$ définie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} M_{n+1} = AM_n \\ M_0 \end{cases}$
La suite (M_n) est géométrique et on a $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = A^n M_0$.
De plus, si la suite (M_n) converge alors la matrice colonne limite M vérifie l'égalité $M = AM$.

Démonstration Par récurrence sur l'entier n :

- Pour $n = 0$, on a bien $M_0 = A^0 M_0$ car la matrice A^0 est par convention égale à la matrice identité I_N. Cela initialise cette propriété.
- En supposant que pour le rang n on ait $M_n = A^n M_0$, calculons $M_{n+1} = AM_n = A \times (A^n M_0)$ mais l'associativité du produit matriciel implique alors que $M_{n+1} = (A \times A^n)M_0 = A^{n+1}M_0$. Cela assure de l'hérédité de cette propriété.

Si la suite (M_n) converge et admet pour limite M alors la suite (AM_n) converge vers la limite AM tandis que la suite (M_{n+1}) converge vers la limite M (c'est la suite que (M_n) avec des indices décalés). Mais (M_{n+1}) et (AM_n) sont une seule et même suite, elles ont donc la même limite :
$M = AM$.

Exemple 9 – Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Intéressons nous à (X_n), la suite géométrique de matrices colonnes définie par $\begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ X_{n+1} = MX_n \end{cases}$

On peut calculer les premiers coefficients d'un terme de la suite à l'aide de la formule de récurrence mais pour un terme quelconque on privilégiera la formule explicite qui nécessite le calcul préalable de M^n. Dans le module de calcul de votre calculatrice il existe sans doute un moyen d'effectuer ces calculs : sur Numworks, on déclare une nouvelle matrice dans la caisse à outils et ensuite, on peut utiliser le produit ou l'élévation à la puissance.
Par exemple $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Pour X_2 on peut continuer $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ou bien on utilise $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
Pour X_{10} on va utiliser la matrice $M_{10} = \begin{pmatrix} 23 & -22 \\ 11 & 34 \end{pmatrix}$ et $X_{10} = M_{10}X_0 = \begin{pmatrix} -21 \\ 79 \end{pmatrix}$.
De même $X_{40} = M_{40}X_0 = \begin{pmatrix} -703\,889 & -1\,506\,054 \\ 753\,027 & 49\,138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,715\,997 \\ 851\,303 \end{pmatrix}$.
Remarquons que cette suite (X_n) semble diverger.

PROPRIÉTÉ 7.12 (SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES) Soit A une matrice carrée de dimension N, B une matrice colonne de dimension $N \times 1$ et (M_n) une suite de matrices colonnes de taille $N \times 1$ définie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} M_{n+1} = AM_n + B \\ M_0 \end{cases}$
La suite (M_n) est arithmético-géométrique et, si il existe une matrice colonne M de dimension $N \times 1$ telle que $M = AM + B$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = A^n(M_0 - M) + M$.
De plus, si la matrice $I_N - A$ est inversible alors la matrice M est égale à $(I_N - A)^{-1}B$.

DÉMONSTRATION Dans les conditions de l'énoncé, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $\begin{cases} M_{n+1} = AM_n + B \\ M = AM + B \end{cases}$
Par soustraction des matrices on obtient $M_{n+1} - M = (AM_n + B) - (AM + B) = A(M_n - M)$.
En posant $U_n = M_n - M$, la suite (U_n) est géométrique puisque $U_{n+1} = AU_n$.
On en déduit $U_n = A^nU_0 = A^n(M_0 - M)$, soit
$M_n - M = A^n(M_0 - M) \iff M_n = A^n(M_0 - M) + M$.

Si la matrice $I_N - A$ est inversible, comme $M = AM + B \iff (I_N - A)M = B$, en multipliant par $(I_N - A)^{-1}$ on obtient l'expression de la matrice $M = (I_N - A)^{-1}B$.

Remarques :
- L'existence d'une matrice M telle que $M = AM + B$ n'implique pas forcément que la suite (M_n) converge. Il peut exister une telle matrice (un état *stable* de la suite (M_n)) dans le cas d'une suite divergente. Mais si la suite (M_n) converge alors l'état stable M en est sa limite.
- Si l'état initial est stable ($M_0 = M$) alors la suite (M_n) est constante (donc convergente).
  Si l'état initial n'est pas stable ($M_0 \neq M$) et si la suite (A^n) converge vers une matrice limite A alors la suite (M_n) converge vers la matrice limite $A(M_0 - M) + M$.

EXEMPLE 10 – Soit $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

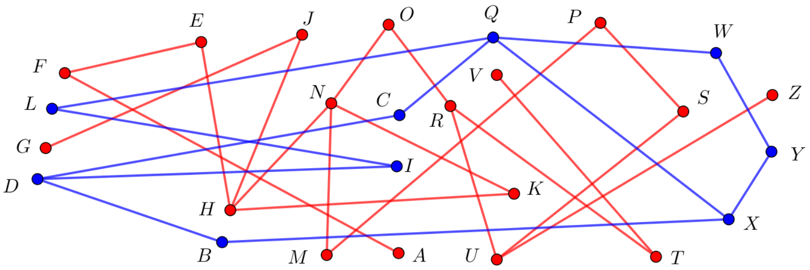
Intéressons nous à (X_n), la suite arithmético-géométrique définie par $\begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ X_{n+1} = AX_n + B \end{cases}$

On peut calculer les premiers termes de la suite (X_n) :
$X_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,8 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$X_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,8 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,24 \\ -2,5 \end{pmatrix}$.

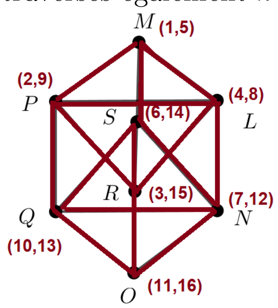
Si on veut X_{10} on s'interroge sur la matrice stable X vérifiant $X = AX + B \Longleftrightarrow (I_N - A)X = B$.
La matrice $I_N - A$ est inversible car I_N et A étant diagonales $I_N - A$ l'est aussi.
$I_N - A = \begin{pmatrix} 1-0,8 & 0 \\ 0 & 1-1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix}$ et $(I_N - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0,2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-0,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Par conséquent $X = (I_N - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Comme A est diagonale on a $A^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ 0 & 1,5^n \end{pmatrix}$.
Finalement, on peut calculer $X_n = A^n(X_0 - X) + X = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ 0 & 1,5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Vérifions cette formule $X_2 = \begin{pmatrix} 0,8^2 & 0 \\ 0 & 1,5^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,24 \\ -2,5 \end{pmatrix}$ ce qui est est correct.
Calculons maintenant $X_{10} = \begin{pmatrix} 0,8^{10} & 0 \\ 0 & 1,5^{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 9,0336 \\ -113,33 \end{pmatrix}$.
On remarque que cette suite semble diverger.
Existe t-il une valeur initiale $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ qui rende cette suite convergente ?
On aura $X_n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ 0 & 1,5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-10 \\ b-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8^n(a-10)+10 \\ 1,5^n(b-2)+2 \end{pmatrix}$.
On observe que, seul, le coefficient $1,5^n(b-2)+2$ peut diverger car $0,8^n$ a pour limite 0.
Ainsi, pour que la suite converge X_n converge, il suffit de prendre $b = 2$ ainsi la suite de terme général $X_n = \begin{pmatrix} 0,8^n(a-10)+10 \\ 2 \end{pmatrix}$ converge vers $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solutions des questions restées en suspens :

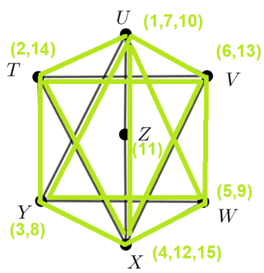
- Il y a deux composantes connexes dans ce graphe. Je les ai mises en évidence par des couleurs.



- Les cycles euleriens solutions sont sans doute nombreux.
On remarque que les sommets d'ordre pair $2k$ sont traversés k fois par la chaîne solution ; les deux sommets d'ordre impair $2k+1$ constituent une extrémité de la chaîne solution et sont traversés également k fois par cette chaîne.



Chaîne eulérienne
M-P-R-L-M-S-N-L-P-Q-O-N-Q-S-R-O



Chaîne eulérienne
U-T-Y-X-W-V-U-Y-W-U-Z-X-V-T-X