5 Nombres complexes

Plan du chapitre :

Aperçu historique :

C'est en Italie, au XVI^{e} *siècle, qu'apparurent les nombres complexes. Niccolò Tartaglia (1499-1557) innove en utilisant la racine carrée de* -1 *(pas encore nommée* i*) comme moyen systématique de résolution des équations du troisième degré. On ne sait pas bien s'il améliora la méthode secrète de Scipione del Ferro ou s'il inventa lui-même cette méthode, toujours est-il qu'il finit par la révéler à Jérôme Cardan (1501-1576) qui la publie en 1545 dans l'ouvrage* Ars Magna *(le Grand Art). Cardan publie également dans ce livre la formule découverte par Ludovico Ferrari, son élève, qui permet de résoudre les équations du quatrième degré en se ramenant à la résolution d'une équation du troisième degré. Quelques années plus tard, Rafaele Bombelli (1526-1572) prolonge le travail de ses compatriotes précurseurs par l'étude des propriétés de ces nombres complexes qu'il publie en 1572 dans* Algebra. *Malgré les avancées considérables de ces pionniers italiens, la communauté mathématique est loin de considérer cette cuisine algébrique comme un travail sur de vrais nombres. Ces nouveaux nombres sont nommés* imaginaires *en 1637 par René Descartes (1596-1650). Leibnitz, contemporain de Descartes, a dit de cette invention que* l'esprit divin s'est manifesté de façon sublime dans cette merveille de l'analyse, ce prodige d'un monde idéal, cet intermédiaire entre l'être et le non-être, que nous appelons la racine imaginaire de l'unité négative. *Leonhard Euler (1707-1783) utilise abondamment ces nombres qu'il définit comme* impossibles, *publie la formule* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ *et l'identité* $e^{i\pi} + 1 = 0$ *dans* Introductio in analysin infinitorum *en 1748, et introduit en 1777 la notation* i*.*

Au début du XIX^{e} *siècle, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) construit précisément le corps, noté* $\mathbb{C}$*, des nombres complexes associés aux opérations d'addition et de multiplication. Il montre que ce corps est algébriquement clos, ce qui conduit à identifier le degré d'un polynôme complexe non nul au nombre de ses racines comptées avec leur ordre de multiplicité. Il appelle* complexes *ces nombres en 1831 dans* Theoria residuorum biquadraticorum *car ce sont des nombres composés d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Influencé par les travaux de Jean-Robert Argand (1768-1822) et Caspar Wessel (1745-1818), Gauss et surtout Augustin Louis Cauchy (1789-1857) développent l'aspect géométrique des complexes ; Cauchy introduit en 1847 les termes* affixe *et* argument*. Plus tard, William Rowan Hamilton (1805-1865) prolonge l'ensemble* $\mathbb{C}$ *en définissant les quaternions.*

L'acceptation de ces nouveaux nombres ressemble à une lente digestion qui s'est étalée sur trois siècles ; la lettre i *est l'initiale d'imaginaire ou inventé, mais c'est aussi celle d'impossible, idiotie, inutile et irréelle. Outre les applications en algèbre, en analyse, et en géométrie, ces nombres trouvent leur utilité en physique. Leur statut est dorénavant solidement établi, personne n'en contestant plus la légitimité. Comme à chaque découverte d'un nouveau type de nombre, le concept même de nombre a dû être remanié.*

1. Le corps des nombres complexes

1.a. Les équations du second degré insolubles dans $\mathbb{R}$

L'ensemble des réels ne contient pas de solution pour certaines équations du second degré comme $x^2+1=0$ ou, plus généralement, $ax^2+bx+c=0$ lorsque $\Delta=b^2-4ac<0$. Le carré d'un réel étant toujours positif, il ne peut égaler -1 ce qui est pourtant la seule façon d'annuler x^2+1.
En introduisant le nombre $\sqrt{-1}$, que l'on va noter i, on a $i^2=(-i)^2=-1$ et l'équation $x^2+1=0$ se retrouve avec deux solutions qui sont i et $-i$. Cet artifice de la numération est un « nombre » (un symbole se prêtant aux opérations que l'on définit avec lui) mais ce n'est pas un nombre réel.
On peut désormais résoudre les équations du second degré qui n'avaient pas de solution dans $\mathbb{R}$.
En effet, les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ existent lorsque $\Delta<0$ puisque
$\sqrt{\Delta}=\sqrt{(-1)\times(-\Delta)}=\sqrt{-1}\times\sqrt{-\Delta}=i\sqrt{-\Delta}$ et le nombre $\sqrt{-\Delta}$ est bien un réel positif.
Les solutions de l'équation s'écrivent alors sous la forme générale $x=a+ib$ où a et b sont des réels :

$$x=\frac{-b\pm i\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Définition 5.1 (Nombre complexe) Soit i le nombre imaginaire définit par $i^2=-1$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres z s'écrivant $a+bi$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. La partie réelle de z notée $\mathcal{R}e(z)$ est le nombre réel a tandis que la partie imaginaire de z notée $\mathcal{I}m(z)$ est le nombre réel b.
Les nombres de $\mathbb{C}$ sont appelés « nombres complexes » et, lorsque la partie réelle d'un nombre complexe est nulle (le nombre s'écrit alors bi avec $b\in\mathbb{R}$), ce nombre est dit « imaginaire pur ».

Exemple 1 – On souhaite factoriser le trinôme du second degré $P(x)=3x^2-2x+1$. Cependant l'équation $3x^2-2x+1=0$ n'a pas de solution réelle car $\Delta=(-2)^2-4\times3=-8<0$.
Calculons les solutions complexes :
Comme $\sqrt{-8}=\sqrt{(-1)\times8}=\sqrt{-1}\times\sqrt{8}=\sqrt{-1}\times\sqrt{4\times2}=2i\sqrt{2}$.
Ces solutions s'écrivent $\dfrac{2\pm2i\sqrt{2}}{6}=\dfrac{1\pm i\sqrt{2}}{3}$ ou aussi $\dfrac{1}{3}\pm i\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.
En anticipant sur les règles du calcul algébrique dans $\mathbb{C}$, on peut donc factoriser le trinôme :

$$P(x)=3x^2-2x+1=3\left(x+\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

Remarques :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient tous les réels, tous les imaginaires purs (leur ensemble est noté $\mathbb{R}i$) et toutes les combinaisons engendrées par la somme de ces deux types de nombres.
  On a donc $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ et, de même, $\mathbb{R}i\subset\mathbb{C}$.
- Toutes les équations du second degré $ax^2+bx+c=0$ ont finalement deux solutions dans $\mathbb{C}$:
  — si $\Delta=b^2-4ac>0$, $x=\dfrac{-b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, les deux solutions sont réelles
  — si $\Delta=0$, $x=\dfrac{-b}{2a}$, la solution réelle est double car alors $ax^2+bx+c=a(x-\dfrac{-b}{2a})^2$
  — si $\Delta<0$, $x=\dfrac{-b}{2a}\pm i\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, les deux solutions sont complexes non réelles
- Le nombre i est souvent noté j par les physiciens qui ne veulent pas le confondre avec le i de l'intensité électrique. Mais on va voir que, pour les mathématiciens, j est un autre nombre complexe égal à $\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Définition 5.2 (Nombre conjugué) Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On appelle conjugué de z le nombre $a - ib$ que l'on note $\bar{z}$.
Les propriétés immédiates sont $z + \bar{z} = 2a$ et $z \times \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$,
Le nombre $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$ est le carré du « module » de z (voir plus loin) et noté $|z|^2$.

Exemple 2 – L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle car $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$, mais elle a deux solutions complexes car $\sqrt{-3} = \sqrt{(-1) \times 3} = \sqrt{-1} \times \sqrt{3} = i\sqrt{3}$.
Ces solutions s'écrivent $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ou aussi $\dfrac{-1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On note j la solution $\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Pourquoi donne-t-on un nom à ce nombre ? Car j est une des trois racines cubiques de 1. En effet :

$$j^3 = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^3}{2^3} = \frac{(-1)^3 + 3i(-1)^2\sqrt{3} + 3i^2(-1)(\sqrt{3})^2 + i^3(\sqrt{3})^3}{8} = \frac{-1 + 3i\sqrt{3} + 3 \times 3 - 3i\sqrt{3}}{8} = 1$$

Les racines cubiques de 1 vérifient l'équation $x^3 = 1$ et, hormis 1 qui est une racine réelle évidente, il y a deux racines complexes conjuguées. En écrivant que $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, on retrouve le trinôme $x^2 + x + 1$ qui a pour racines j et son conjugué $\bar{j}$ égal à $\dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
$\bar{j}$ est égal à j^2 car $j^2 = \dfrac{(-1 + i\sqrt{3})^2}{2^2} = \dfrac{1 - 2i\sqrt{3} + i^2(\sqrt{3})^2}{4} = \dfrac{-2 - 2i\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, mais aussi car $j \times j^2 = j^3 = 1$, comme on vient de le voir.
Le fait que j et j^2 soient conjugués implique que :

- $\mathcal{R}e(j^2) = \mathcal{R}e(j) = \dfrac{-1}{2}$ et $\mathcal{I}m(j^2) = -\mathcal{I}m(j) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- Leur somme vaut $j + j^2 = 2 \times \mathcal{R}e(j) = 2 \times \frac{-1}{2} = -1$ (comme j est solution de $x^2 + x + 1 = 0$, il n'est pas étonnant que $j^2 + j = -1$).
- Leur produit est $j \times j^2 = (\mathcal{R}e(j))^2 + (\mathcal{I}m(j))^2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ (comme j est une racine cubique de 1, il n'est pas étonnant que $j \times j^2 = j^3 = 1$).

Propriété 5.1 (Conjugaison) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a :

a) $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z)$	b) $z - \bar{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$	c) $z \times \bar{z} = \lvert z\rvert^2$
d) $\bar{\bar{z}} = z$	e) $\overline{-z} = -\bar{z}$	
f) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = z$	g) $z \in \mathbb{R}i \Rightarrow \bar{z} = -z$	h) $\bar{z} = \bar{z'} \Leftrightarrow z = z'$

Démonstration Toutes ces propriétés sont évidentes. Il suffit de partir de la définition du conjugué et d'utiliser les propriétés algébriques de $\mathbb{C}$ qui prolongent celle de $\mathbb{R}$ comme on va le voir plus loin.
Montrons par exemple que $\bar{\bar{z}} = z$:
Si $z = a + ib$ alors $\bar{z} = a - ib$ et $\bar{\bar{z}} = a - (-ib) = a + ib$.
Montrons maintenant l'équivalence $\bar{z} = \bar{z'} \iff z = z'$:

- La propriété directe : $z = z' \implies \bar{z} = \bar{z'}$ est évidente.
- Réciproquement, si $\bar{z} = \bar{z'}$ alors, d'après la propriété directe on doit avoir $\bar{\bar{z}} = \bar{\bar{z'}}$, et comme $\bar{\bar{z}} = z$ et $\bar{\bar{z'}} = z'$, on en déduit que $z = z'$.

1.b. Algèbre complexe

L'invention des nombres complexes étend les propriétés algébriques connues dans $\mathbb{R}$.
Ainsi, l'égalité, l'addition et la multiplication conservent les propriétés qu'on leur connait dans $\mathbb{C}$: $+$ et $\times$ sont commutatives et associatives ; $\times$ est distributive par rapport à $+$; on peut ajouter aux deux membres d'une égalité un même nombre, ou les multiplier par un même nombre non nul ; chaque nombre à un opposé et un inverse (sauf 0) ; etc.

Propriété 5.2 (Unicité) L'écriture algébrique d'un nombre complexe de $\mathbb{C}$ est unique.
Soient $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes. $z = z' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Démonstration $z = z' \iff a + bi = a' + b'i \iff a - a' = i(b - b')$
Comme $a - a' \in \mathbb{R}$ et $i(b - b') \in \mathbb{R}i$, la seule possibilité est $b - b' = 0$ et par conséquent $a - a' = 0$.

Exemple 3 – Résolvons l'équation complexe $z^2 = 2 + i$.
En notant $z = a + bi$, cette équation s'écrit
$(a + bi)^2 = 2 + i \iff a^2 - b^2 + 2abi = 2 + i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ 2ab = 1 \end{cases}$
On a nécessairement $a \neq 0$ car sinon on aurait $-b^2 = 2$ ce qui n'est pas possible dans $\mathbb{R}$.
De la 2e équation, on tire donc $b = \frac{1}{2a}$ que l'on substitue dans la 1re pour écrire $a^2 - \frac{1}{4a^2} = 2$.
Il nous faut résoudre l'équation bicarrée $4a^4 - 1 = 8a^2$ qui s'écrit $4A^2 - 8A - 1 =$ avec le changement de variable $A = a^2$. Comme $\Delta = 64 + 16 = 80 = 5 \times 4^2$, les solutions sont $A = \frac{8 \pm \sqrt{5 \times 4^2}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$.
La solution $A = \frac{2 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.236 < 0$ est impossible car A est le carré d'un réel.
On doit donc avoir $A = \frac{2 + \sqrt{5}}{2}$ et donc $a = \pm\sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{2}}$.
Comme $b = \frac{1}{2a}$, on trouve finalement les deux solutions :

- $a = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}$ et $b = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{5})}}$ d'où $z_1 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2(2+\sqrt{5})}}$
- $a = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}$ et $b = \frac{-1}{\sqrt{2(2+\sqrt{5})}}$ d'où $z_2 = -z_1 = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} - \frac{i}{\sqrt{2(2+\sqrt{5})}}$

Propriété 5.3 (Addition) L'addition dans $\mathbb{C}$, définie par $(a+bi)+(a'+b'i) = (a+a')+(b+b')i$, confère à $(\mathbb{C},+)$ la structure de groupe commutatif.

- Commutativité : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' = z' + z$
- Associativité : $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, z + (z' + z'') = (z + z') + z''$, expression notée $z + z' + z''$
- Élément neutre : $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$, le réel 0 est l'élément neutre de $+$ dans $\mathbb{C}$
- Opposé : $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C}, z + z' = 0$ et lorsque $z = a + bi$, cet élément z' est $-z = -a - bi$

Remarques :

- Ces propriétés découlent du fait que l'on définit $\mathbb{C}$ comme une extension de $\mathbb{R}$, donc avec les même propriétés : $(\mathbb{R},+)$ étant un groupe commutatif, $(\mathbb{C},+)$ en est un aussi.
- La soustraction dans $\mathbb{C}$ est définie comme dans $\mathbb{R}$ par l'addition de l'opposé : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z - z' = z + (-z')$

Propriété 5.4 (Multiplication) La multiplication dans $\mathbb{C}$, définie par $(a+bi) \times (a'+b'i) = (aa'-bb')+(ab'+ba')i$, confère à $(\mathbb{C}^*,\times)$ la structure de groupe commutatif.

- Commutativité : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z \times z' = z' \times z$
- Associativité : $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, z \times (z' \times z'') = (z \times z') \times z''$, expression notée $zz'z''$
- Élément neutre : $\forall z \in \mathbb{C}, z \times 1 = 1 \times z = z$, le réel 1 est l'élément neutre de $\times$ dans $\mathbb{C}$
- Inverse : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z' \in \mathbb{C}^*, z \times z' = 1$ et lorsque $z = a + bi$, cet élément z' est $\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$

Démonstration Ici encore, ces propriétés découlent du fait que l'on définit $\mathbb{C}$ comme une extension de $\mathbb{R}$. Le dernier point mérite d'être justifié :
Soient $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ tels que $z \times z' = 1$. On doit donc avoir $(aa' - bb') + (ab' + ba')i = 1$ et cette égalité conduit au système $\begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ab' + ba' = 0 \end{cases}$

En multipliant la 1re égalité par a et la 2e par b, on obtient
$\begin{cases} a^2a' - abb' = a \\ abb' + b^2a' = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ (addition membre à membre) $a^2a' + b^2a' = (a^2+b^2)a' = a \Longrightarrow a' = \dfrac{a}{a^2+b^2}$

En multipliant la 1re égalité par $-b$ et la 2e par a, on obtient
$\begin{cases} -aba' + b^2b' = -b \\ a^2b' + aba' = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ (addition membre à membre) $b^2b' + a^2b' = (a^2+b^2)b' = -b \Longrightarrow b' = \dfrac{-b}{a^2+b^2}$

Finalement on obtient bien $z' = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$.

Remarques :

- Comme dans $\mathbb{R}$, 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{C}$.
- Cas particulier de multiplication : $\forall (k,a,b) \in \mathbb{R}^3, k \times (a+bi) = (ka) + (kb)i$.
- Si $z = a+bi$ alors le conjugué de z est $\bar{z} = a - bi$ et le carré de son module est $|z|^2 = a^2+b^2$, du coup l'inverse de z est $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ et comme la division dans $\mathbb{C}$ est définie comme dans $\mathbb{R}$ par la multiplication de l'inverse : $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$.
  Avec les notations algébriques $z = a+bi$ et $z' = a'+b'i$ on a :
  $\dfrac{z}{z'} = (a+bi) \times \dfrac{a'-b'i}{a'^2+b'^2} = \dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2} = \dfrac{(aa'+bb') + (-ab'+ba')i}{a'^2+b'^2}$.
- Comme $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif, $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif et comme $\times$ est distributive sur $+$, l'ensemble des complexes muni de ces deux opérations $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif. Dedekind définit un corps (*Körper* en allemand) comme un sous-ensemble de nombres réels ou complexes stable par addition, soustraction, multiplication et division. Outre $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ (l'ensemble des rationnels), l'ensemble des entiers modulo un nombre premier p (noté $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) est un corps (l'ensemble $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ par exemple contient les éléments $\{0,1,2,3,4\}$)

Exemple 4 – ➲ Écrivons plus simplement le quotient de $5-2i$ par $-1+3i$:

$$\frac{5-2i}{-1+3i} = \frac{(5-2i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{(-5-6)+(-15+2)i}{(-1)^2+(-3)^2} = \frac{-11-13i}{10}$$

L'équation $(-1+3i)z = 5-2i$ a donc pour solution $z = \dfrac{-11-13i}{10} = \dfrac{-11}{10} - \dfrac{13i}{10} = -1{,}1 - 1{,}3i$

➲ Si $z = a+bi$, écrivons plus simplement le quotient z' de $z-2i$ par $z+1$:

$$z' = \frac{z-2i}{z+1} = \frac{a+(b-2)i}{(a+1)+bi} = \frac{(a+(b-2)i)(a+1-bi)}{(a+1+bi)(a+1-bi)} = \frac{a(a+1)+b(b-2)+i(-ab+(a+1)(b-2))}{(a+1)^2+b^2}$$

On en déduit que $\mathcal{R}e(z') = \dfrac{a(a+1)+b(b-2)}{(a+1)^2+b^2}$ et $\mathcal{I}m(z') = \dfrac{-ab+(a+1)(b-2)}{(a+1)^2+b^2} = \dfrac{b-2a-2}{(a+1)^2+b^2}$

➲ Si $z = 1+2i$ et $z' = 2-i$, écrivons algébriquement le complexe $(z^2-1)(i-z')$:

$$(z^2-1)(i-z') = ((1+2i)^2-1)(i-(2-i)) = (1-4+4i-1)(i-2+i) = 4\times 2(-1+i)(i-1) = 8(-2i) = -16i$$

Propriété 5.5 (Conjugaison (suite)) $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

a) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$	b) $\overline{z-z'} = \bar{z} - \bar{z'}$	c) $\overline{(-z)} = -\bar{z}$
d) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$	e) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$	f) $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
g) $\overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}$	h) $\overline{\prod_{i=1}^{n} z_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{z_i}$	i) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

DÉMONSTRATION ➠ Les propriétés de la 1re ligne sont évidentes.
Montrons que $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ en notant $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$:

- $\overline{z \times z'} = \overline{(aa' - bb') + (ab' + ba')i} = (aa' - bb') - (ab' + ba')i$
- $\bar{z} \times \bar{z'} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - (-b)(-b')) + (a(-b') + (-b)a')i = (aa' - bb') - (ab' + ba')i$

➠ Montrons que $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$:
Par définition de l'inverse $z \times \frac{1}{z} = 1$ et d'après la propriété précédente $\overline{z \times \frac{1}{z}} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$.
Comme de plus $\overline{z \times \frac{1}{z}} = \bar{1} = 1$, on en déduit que $\bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1 \iff \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

➠ Montrons maintenant que $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$:
Comme $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, on en déduit que $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

➠ Pour les deux 1re propriétés de la dernière ligne, on procède par récurrence sur $n \geqslant 1$:

- Pour $n = 1$: $\overline{\sum_{i=1}^{1} z_i} = \overline{z_1} = \sum_{i=1}^{1} \overline{z_i}$
- Supposons que pour $n \geqslant 1$, on aie $\overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}$, calculons :

$$\overline{\sum_{i=1}^{n+1} z_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} z_i + z_{n+1}} = \overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} + \overline{z_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} \overline{z_i}$$

L'initialisation et l'hérédité de cette propriété étant vraie, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
On procède de même pour le produit :

- Pour $n = 1$: $\overline{\prod_{i=1}^{1} z_i} = \overline{z_1} = \prod_{i=1}^{1} \overline{z_i}$
- Supposons que pour $n \geqslant 1$, on aie $\overline{\prod_{i=1}^{n} z_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{z_i}$, calculons :

$$\overline{\prod_{i=1}^{n+1} z_i} = \overline{\prod_{i=1}^{n} z_i \times z_{n+1}} = \overline{\prod_{i=1}^{n} z_i} \times \overline{z_{n+1}} = \prod_{i=1}^{n+1} \overline{z_i}$$

Le principe de récurrence permet alors de conclure pour tout $n \geqslant 1$.

➠ La dernière propriété est un cas particulier de la précédente :
$\forall n \geqslant 1, \overline{(z^n)} = \overline{\prod_{i=1}^{n} z} = \prod_{i=1}^{n} \bar{z} = \overline{(z)}^n$

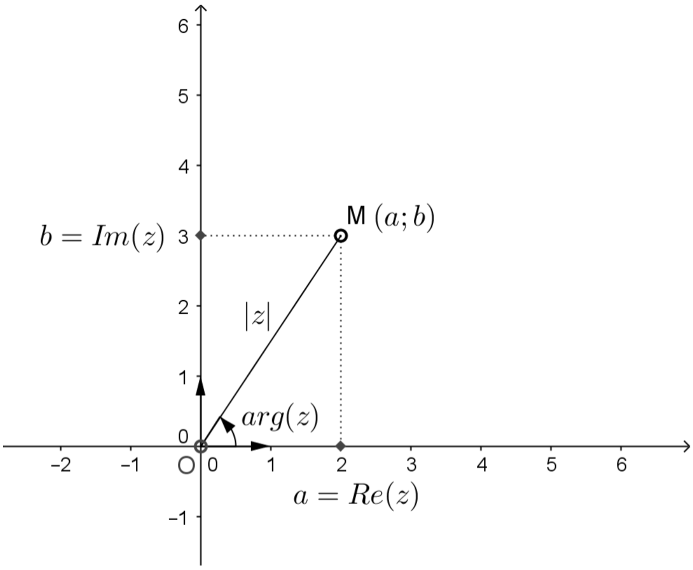
2. Géométrie dans le plan complexe

Si les nombres complexes sont apparus dans le contexte de la résolution des équations du 3e degré, les utilisations que l'on peut en faire sont sans limite. Le principal atout de ces nombres est de combiner deux nombres en un seul dont on peut toujours séparer chacun des constituants. Cette avantage confère aux complexes la capacité de représenter des points ou des vecteurs du plan.

2.a. Le plan complexe

Depuis Jean-Robert Argand (1806), le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé « affixe » du point M de coordonnées $(a\,;\,b)$ ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans un repère orthonormé d'origine O.
La partie réelle de z est l'abscisse de M tandis que la partie imaginaire de z est son ordonnée.
Chaque nombre de $\mathbb{C}$ correspond ainsi à un point de ce plan, appelé « plan complexe ».

DÉFINITION 5.3 (AFFIXE ET MODULE) Le plan complexe ayant comme repère $(O, \vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$, un point M de ce plan est repéré par son « affixe » complexe $z = a + ib$, ce que l'on note $M(z)$.
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est également repéré par l'affixe $z = a + ib$ et on note cela $\overrightarrow{OM}(z)$.
Le « module » de z, noté $|z|$, est le nombre $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \times \bar{z}}$ qui correspond à la distance OM.
Les coordonnées du point $M(z)$ sont $(\mathcal{R}e(z), \mathcal{I}m(z))$.



DÉFINITION 5.4 (ARGUMENT) Dans le plan complexe de repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un point $M(z)$ étant donné, l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ est appelé « argument » de z et noté $\arg(z)$.

Remarques :

- $\arg(a + ib)$ est un angle, mesuré en radians, qu'on détermine à la calculatrice si $a \neq 0$.
  - Si $a > 0$, on tape $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ ($\tan^{-1}$ est parfois notée *atan*) puisque $\tan(\arg(z)) = \frac{b}{a}$.
    Si $b = 0$ alors $\arg(z) = 0$ et $|z| = a$.
  - Si $a < 0$, comme $\tan^{-1}$ donne un angle de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}\,; \frac{\pi}{2}[$, on tape $\tan^{-1}(\frac{b}{a}) + \pi$.
    Si $b = 0$ alors $\arg(z) = \pi$ et $|z| = -a$.
  - Si $a = 0$, alors $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ et $|z| = b$ si $b > 0$ ou $\arg(z) = \frac{-\pi}{2}$ et $|z| = -b$ si $b < 0$.
- Sur l'illustration ci-dessus, le point M a pour coordonnées $(2\,; 3)$.
  - son affixe est le complexe $z = 2 + 3i$
  - son module est $|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
  - son argument est $\arg(z) = \tan^{-1}(\frac{3}{2}) \approx 0,98279$ *rad.*
- Comme $\mathcal{R}e(z)$ est porté par l'axe des abscisses, celui-ci est l'« axe des réels » ; de même, comme $\mathcal{I}m(z)$ est porté par l'axe des ordonnées, celui-ci est l'« axe des imaginaires ».
  De ce fait, si un point a pour affixe un nombre réel, ce point est sur l'axe des réels ; de même, si un point a pour affixe un nombre imaginaire, ce point est sur l'axe des imaginaires.

PROPRIÉTÉ 5.6 (NOTATION TRIGONOMÉTRIQUE) Tout nombre complexe non nul z peut être noté sous la forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \;\; [2\pi]$.
On a alors $\mathcal{R}e(z) = r\cos\theta$, $\mathcal{I}m(z) = r\sin\theta$ et $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) \;\; [2\pi] \end{cases}$
De plus $|\mathcal{R}e(z)| \leqslant r$ et $|\mathcal{I}m(z)| \leqslant r$

DÉMONSTRATION On a déjà montré, propriété **??**, que $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \mathcal{R}e(z_1) = \mathcal{R}e(z_2) \\ \mathcal{I}m(z_1) = \mathcal{I}m(z_2) \end{cases}$.

Par conséquent $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow M(z_1) = M'(z_2)$. Les points M et M' sont confondus car leurs coordonnées cartésiennes sont égales (les parties réelles et imaginaires de leurs affixes).
Leurs coordonnées polaires (modules et arguments) sont donc égales car la correspondance entre l'écriture algébrique et l'écriture trigonométrique d'un complexe est biunivoque :

- Si le point M a pour affixe $z = a + ib$, choisir $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\arg(z) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ assure l'unicité du module et de l'argument de z.
- Si le point M a pour module r et pour argument θ $[2\pi]$, choisir $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ assure l'unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire de z.

Exemple 5 – ➲ Le point $I(1)$ est sur l'axe réel.
Comme il est positif, son argument est 0 $[2\pi]$ et son module 1. Par conséquent $1 = \cos 0 + i \sin 0$.
➲ Le point $J(i)$ est sur l'axe imaginaire.
Comme sa partie imaginaire est positive ($\mathcal{I}m(i) = 1$), son argument est $\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et son module 1. La notation trigonométrique de i est $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.
➲ Le point $O(0)$ a un module égal à 0 mais son argument n'est pas défini.
➲ Le point d'affixe j a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2})$.

- Son module est $|j| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$
- Comme $a = -\frac{1}{2} < 0$, son argument $\arg(j) = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3} \div 2}{-1 \div 2}) + \pi \approx 2,094395102$.
  Comme $3 \times 2,094395102 \approx 6,283185307 \approx 2\pi$, on peut conclure que $\arg(j) = \frac{2\pi}{3} rad$.
  Mais cela se montre plus directement : comme $|j| = 1$, le point d'affixe j est sur le cercle trigonométrique. Son argument θ est tel que $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
  Un seul angle de $[0\,;2\pi[$ a ces caractéristiques, c'est $\frac{2\pi}{3}$.

Ainsi, la notation trigonométrique de j est $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Propriété 5.7 (Points remarquables) $\forall z \in \mathbb{C}$, on a :

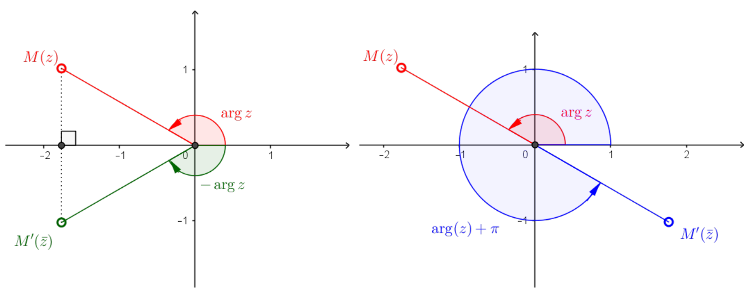
$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ $[2\pi]$	$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$	les points $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.
$\arg(-z) = \arg(z) + \pi$ $[2\pi]$	$\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	les points $M(z)$ et $M''(-z)$ sont symétriques par rapport à l'origine.

Démonstration M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des réels car leurs affixes ont même partie réelle et des parties imaginaires opposées. On a déjà montré que $\bar{z}$ et z ont même module.
Montrons que leurs arguments sont opposés :

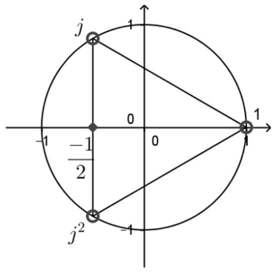
- $\mathcal{R}e(\bar{z}) = \mathcal{R}e(z) = r\cos\theta = r\cos(-\theta)$ car $\forall\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta$
- $\mathcal{I}m(\bar{z}) = -\mathcal{I}m(z) = -r\sin\theta = r(-\sin\theta) = r\sin(-\theta)$ car $\forall\theta, \sin(-\theta) = -\sin\theta$

M et M'' sont symétriques par rapport à l'origine car leurs affixes ont des parties réelles et imaginaires opposées. Les modules sont égaux : $|-a-bi| = (-a)^2 + (-b)^2 = a^2 + b^2 = |a + bi|$.
Montrons que les arguments de $-z$ et z diffèrent de π :

- $\mathcal{R}e(-z) = -\mathcal{R}e(z) = -r\cos\theta = r\cos(\theta + \pi)$ car $\forall\theta, \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$
- $\mathcal{I}m(-z) = -\mathcal{I}m(z) = -r\sin\theta = r\sin(\theta + \pi)$ car $\forall\theta, \sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$



Remarque :
$j^2 = \overline{j} = \cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}$ car $\overline{j}$ a même module que j et un argument opposé.
Les points d'affixe 1, j et $j^2 = \overline{j}$, les trois racines cubiques de l'unité, sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique. En effet, ces trois nombres ont pour module 1 et les points du cercle trigonométrique dont ils sont les affixes forment des angles au centre deux à deux égaux à $\frac{\pm 2\pi}{3}$ ($\arg(1) = 0$, $\arg(j) = \frac{2\pi}{3}$ et $\arg(j^2) = \frac{-2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$).



PROPRIÉTÉ 5.8 (LINÉARITÉ) L'association d'un vecteur à son affixe $f : \vec{v} \longmapsto z \in \mathbb{C}$ est une bijection linéaire, c'est-à-dire que quels que soient $\vec{v_1} \mapsto z_1$ et $\vec{v_2} \mapsto z_2$:

Bijection : $\vec{v_1} = \vec{v_2} \iff z_1 = z_2$ | Linéarité : $\begin{cases} \vec{v_1} + \vec{v_2} \mapsto z_1 + z_2 \\ \forall k \in \mathbb{R},\ \ k\vec{v_1} \mapsto kz_1 \end{cases}$

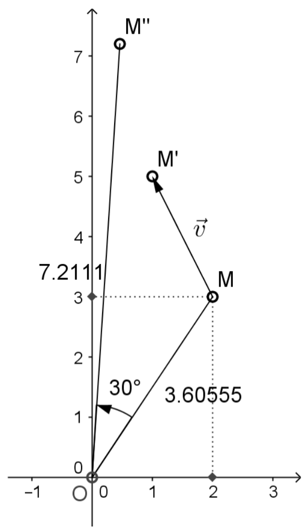
DÉMONSTRATION ➲ Bijection :
Le sens direct est évident puisqu'un vecteur est associé à une affixe unique $\vec{v_1} = \vec{v_2} \Longrightarrow z_1 = z_2$.
Réciproquement si $z_1 = z_2 = z$, les composantes de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ étant les mêmes $(\mathcal{R}e(z), \mathcal{I}m(z))$, celles-ci désignent un seul et unique vecteur $\vec{v} = \vec{v_1} = \vec{v_2}$.

➲ Linéarité de l'addition :
Sous forme algébrique, si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
La décomposition de $\vec{v_1} + \vec{v_2}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $(a_1\vec{\imath} + b_1\vec{\jmath}) + (a_2\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath}) = (a_1 + a_2)\vec{\imath} + (b_1 + b_2)\vec{\jmath}$.
On constate que l'affixe complexe de $\vec{v_1} + \vec{v_2}$ est $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, soit $z_1 + z_2$.

➲ Linéarité de la multiplication par un réel :
De même, si $z_1 = a_1 + ib_1$ alors $kz_1 = k(a_1 + ib_1) = (ka_1) + (kb_1)i$.
La décomposition de $k\vec{v_1}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $k(a_1\vec{\imath} + b_1\vec{\jmath}) = (ka_1)\vec{\imath} + (kb_1)\vec{\jmath}$.
On constate que l'affixe complexe de $k\vec{v_1}$ est $(ka_1) + (kb_1)i$, soit kz_1.

Remarques :

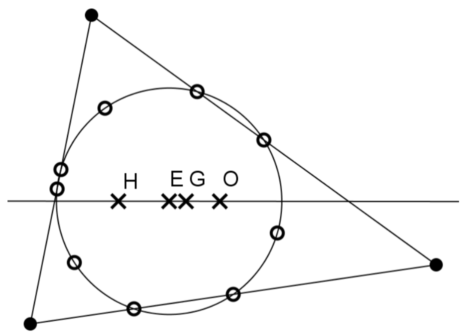
- L'addition d'un complexe z_1 à un complexe z_2 prend du sens si on considère le point $M(z_1)$ et le vecteur $\vec{v}$ d'affixe z_2, car le complexe $z = z_1 + z_2$ est alors l'affixe de l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$. Par exemple, lorsqu'on fait subir au point $M(2+3i)$ ci-contre la translation de vecteur $\vec{v}(-1+2i)$, on obtient le point M' d'affixe $(2+3i) + (-1+2i) = 1+5i$
- Pour des points $M(z)$ et $M'(z')$, le complexe $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$. La soustraction de deux complexes permet de calculer la distance $MM' = |z' - z|$.
  Sur l'exemple ci-contre, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $(1+5i) - (2+3i) = -1+2i$
  On en déduit $MM' = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$



- Pour des points $M(z)$ et $M'(z')$, le complexe $\frac{z+z'}{2}$ est l'affixe du milieu I du segment $[MM']$.
  En effet, on sait qu'alors $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}}{2}$, l'affixe de I en découle.
- La traduction de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ($ABCD$ est un parallélogramme) avec les affixes est $z_B - z_A = z_C - z_D$ ([AB] et [DC] sont parallèles, égaux et de même sens) ou, ce qui revient au même, $z_A + z_C = z_B + z_D$ ([AC] et [BD] ont même milieu).

Exemple 6 – Généralisons la situation du triangle dont les sommets ont pour affixes les racines cubiques de l'unité : Si des points M, M' et M'' ont des affixes z, z' et z'' telles que $|z| = |z'| = |z''|$, montrons que le triangle $MM'M''$ est équilatéral si et seulement si $z + z' + z'' = 0$.
L'égalité $|z| = |z'| = |z''| \iff OM = OM' = OM''$ indique que M, M' et M'' sont sur un même cercle de centre O.
L'égalité $z + z' + z'' = 0$ traduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{0}$.
L'origine du repère – le point O – est donc le centre de gravité du triangle $MM'M''$.
Le centre du cercle circonscrit étant confondu avec le centre de gravité, le triangle est équilatéral.

Exemple 7 – Montrons maintenant que le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit O et l'orthocentre H d'un triangle quelconque $MM'M''$ sont alignés. Sans perte de généralité, considérons que les affixes sont données dans un repère d'origine O.
L'affixe de G est le complexe $g = \dfrac{z+z'+z''}{3}$ car $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''} = 3\overrightarrow{OG}$.
L'affixe du milieu N de $[M'M'']$ est $n = \dfrac{z'+z''}{2}$ car $\overrightarrow{ON} = \dfrac{\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OM''}}{2}$.
Le point H d'affixe $h = z + z' + z''$ est tel que $h - z = 2\left(\dfrac{z'+z''}{2}\right) \iff h - z = 2n$, ce qui traduit le fait que $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{ON}$. La droite (ON) étant la médiatrice de $[M'M'']$, on en déduit que (MH) est parallèle à cette médiatrice, donc perpendiculaire au côté $[M'M'']$. Comme (MH) passe par M, c'est donc la hauteur issue de M, et il en va de même pour les autres hauteurs qui passent toutes par H.
Le point H est donc l'orthocentre du triangle.
Les affixes de G et H étant liées par l'égalité $h = 3g$, on en déduit que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, ce qui prouve l'alignement de O, G et H sur une droite appelée « droite de Euler » du triangle. Sur cette droite, un point se distingue : le point E d'affixe $e = \dfrac{z+z'+z''}{2}$.
E est le milieu du segment $[OH]$ et $e - \frac{z'+z''}{2} = \frac{z}{2} \iff e - n = \dfrac{z}{2}$. Les modules de ces deux complexes sont donc égaux, or $|e - n| = EN$ et $|\dfrac{z}{2}|$ est la moitié du rayon du cercle circonscrit. En faisant de même avec les deux autres sommets, on obtient que E est équidistant des trois milieux des côtés du triangle. Le cercle centré sur E contient d'autres points remarquables du triangle (les pieds des hauteurs et les milieux des segments joignant les sommets à l'orthocentre, voir la figure ci-dessous), on l'appelle « cercle de Euler » ou « cercle des neuf points » du triangle.



PROPRIÉTÉ 5.9 (MULTIPLICATION) Soient z, z_1 et z_2 des complexes quelconques :

- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ et $\arg(z_1 \times z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad [2\pi]$
- $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \arg z \quad [2\pi]$
- Si $z \neq 0$ alors $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$
- Si $z_2 \neq 0$ alors $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2 \quad [2\pi]$

DÉMONSTRATION ➠ Écrivons $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ où $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$, $\theta_1 = \arg(z_1)$ et $\theta_2 = \arg(z_2)$. On a

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)\right] \\ &= r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right] \end{aligned}$$

La dernière égalité vient des formules de duplication étudiées en classe de 1re grâce au produit scalaire. On tire alors de l'expression finale le module et l'argument de $z_1 \times z_2$.

➠ On montre que $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg z$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

➠ Pour un complexe non nul $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, son inverse
$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2} = \frac{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)}{r}$ d'où $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{r}$ et $\arg(\frac{1}{z}) = -\theta$.

➠ Comme diviser revient à multiplier par l'inverse, on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \times \frac{1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\right) \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right] \end{aligned}$$

La dernière égalité vient ici aussi des formules de duplication, on tire le module et l'argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

Remarques :

- Si on considère le point $M(z_1)$ et le complexe z_2 de module $r = |z_2|$ et d'argument $\theta = \arg(z_2)$, le complexe $z = z_1z_2$ est l'affixe de l'image de M par une rotation d'angle θ suivie d'une homothétie de centre O et de rapport r.
  Sur l'illustration de la propriété **??**, le point $M(2+3i)$ est envoyé sur le point M'' par la rotation d'angle 30° suivi d'une homothétie de centre O et de rapport 2.
  Pour déterminer l'affixe z de M'', il suffit de calculer le produit :
  $z = (2+3i)\left(2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})\right) = 2(2+3i)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = 2\sqrt{3} - 3 + (2+3\sqrt{3})i \approx 0,4641 + 7,196i$.
- Pour deux vecteurs $\vec{v_1}(z_1)$ et $\vec{v_2}(z_2)$, la division des affixes $\frac{z_1}{z_2}$ a pour argument l'angle $(\vec{v_2}, \vec{v_1})$ et, en notant $z_1 = a_1 + b_1i$ et $z_2 = a_2 + b_2i$, vaut $\frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$.
  La partie réelle du numérateur correspond au produit scalaire des vecteurs $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}$ tandis que la partie imaginaire en est le déterminant $\det(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.
  Autrement dit, $\mathcal{R}e(\frac{z_1}{z_2}) = 0 \iff \vec{v_1} \perp \vec{v_2}$ et $\mathcal{I}m(\frac{z_1}{z_2}) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{R}^*, \vec{v_1} = k\vec{v_2}$.
- On peut redémontrer la partie « argument » de la propriété **??** en écrivant :
  — $z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}^+$ donc $\arg(z\bar{z}) = 0 \iff \arg z + \arg\bar{z} = 0 \iff \arg\bar{z} = -\arg z \quad [2\pi]$.
  — $-z = (-1) \times z$ donc $\arg -z = \arg((-1) \times z) = \arg(-1) + \arg z = \pi + \arg z \quad [2\pi]$.

Propriété 5.10 (Inégalité triangulaire) Soient z_1 et z_2 des complexes quelconques :
$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$ avec égalité pour $z_1=0$ ou $z_2=0$ ou $(z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}^{+*}, z_2=kz_1)$

Démonstration

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} && \text{(d'après la propriété ??.c)}\\
&= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) && \text{(d'après la propriété ??.a)}\\
&= z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 && \text{(d'après la propriété ??)}\\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}} && \text{(d'après la propriété ??.d)}\\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathcal{R}e\left(z_1\overline{z_2}\right) && \text{(d'après la propriété ??.a)}
\end{aligned}$$

Or $\forall z \in \mathbb{C}, |\mathcal{R}e(z)| \leqslant |z|$ et à fortiori $\mathcal{R}e(z) \leqslant |z|$, donc $\mathcal{R}e\left(z_1\overline{z_2}\right) \leqslant |z_1\overline{z_2}|$.
De plus $|z_1\overline{z_2}| = |z_1| \times |\overline{z_2}| = |z_1| \times |z_2|$. On en déduit $2\mathcal{R}e\left(z_1\overline{z_2}\right) \leqslant 2|z_1||z_2|$, et finalement $|z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| \iff |z_1+z_2|^2 \leqslant (|z_1|+|z_2|)^2$.
La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient l'inégalité cherchée.

L'égalité se produit lorsque $\mathcal{R}e\left(z_1\overline{z_2}\right) = |z_1||z_2|$.
Or, si $\arg(z_1)=\theta_1$ et $\arg(z_2)=\theta_2$, on a $\arg(\overline{z_2}) = -\theta_2$ (d'après la propriété **??**) et donc $\mathcal{R}e\left(z_1\overline{z_2}\right) = |z_1||z_2|\cos(\theta_1-\theta_2)$. L'égalité est possible à condition que :
$$\begin{cases} |z_1|=0 \iff z_1=0 \text{ ou,}\\ |z_2|=0 \iff z_2=0 \text{ ou,}\\ \cos(\theta_1-\theta_2)=1 \iff \theta_1-\theta_2=0 \ \ [2\pi] \iff \theta_1=\theta_2 \ \ [2\pi]. \end{cases}$$
Dans la dernière possibilité, les deux vecteurs ont alors même direction et même sens, c'est-à-dire que $\exists k \in \mathbb{R}^{+*}, \overrightarrow{v_1} = k\overrightarrow{v_2}$.

Propriété 5.11 (Nombres de module 1) L'ensemble des nombres complexes de module 1, noté $\mathbb{U}$, est stable pour la multiplication et le passage à l'inverse.
Autrement dit : $\forall (z,z') \in \mathbb{U}^2, \forall n \in \mathbb{N}, zz' \in \mathbb{U}, \frac{1}{z} \in \mathbb{U}, \frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$ et $z^n \in \mathbb{U}$

Démonstration Par définition $z \in \mathbb{U} \iff |z|=1$ et $z' \in \mathbb{U} \iff |z'|=1$.
Comme $|zz'| = |z| \times |z'|$ d'après la propriété **??**, on en déduit $|zz'|=1 \iff zz' \in \mathbb{U}$.
De même, comme $|\dfrac{1}{z}| = \dfrac{1}{|z|}$, $|z|=1 \iff |\dfrac{1}{z}|=1 \iff \dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$
et comme $|\dfrac{z}{z'}| = \dfrac{|z|}{|z'|}$, $|z|=1$ et $|z'|=1 \iff |\dfrac{z}{z'}|=1 \iff \dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$.
Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, z^n \in \mathbb{U}$, il suffit bien sûr de raisonner par récurrence sur n.

Remarques :

- L'ensemble $\mathbb{U}$, doté de la multiplication est un groupe commutatif et un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Il correspond sur le plan complexe au cercle trigonométrique car si $z \in \mathbb{U}$ est l'affixe d'un point M alors $OM=1$.
  L'écriture trigonométrique d'un nombre quelconque de $\mathbb{U}$ est $\cos\theta + i\sin\theta$.
- Les nombres complexes 1, i, $-i$, -1, j et $j^2=\overline{j}$ font partie de $\mathbb{U}$ ainsi que les produits $i^n \times j^m$ quels que soient les entiers n et m. Calculons l'argument de ce produit avec la propriété **??** :
  $\arg(i^n) \times \arg(j^m) = n\arg(i) + m\arg(j) = \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{2m\pi}{3} = \dfrac{(3n+4m)\pi}{6} \quad [2\pi]$
- On peut facilement déterminer des lignes trigonométriques dans $\mathbb{U}$. Exemple : $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, si $z = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}) = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, comme $\arg(z) = \frac{\pi}{12}$, on en déduit $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3. Trigonométrie avec les complexes

Propriété 5.12 (Formule de Moivre) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Démonstration Distinguons deux cas :
➠Cas $n \geqslant 0$:
C'est encore une conséquence de la propriété **??** $\arg(z^n) = n\arg z\,[2\pi]$ avec ici $\arg z = \theta$.

➠Cas $n < 0$:
On applique la propriété en remarquant que $-n > 0$:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n}}\\ &= \frac{1}{\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)}\\ &= \frac{1}{\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)}\\ &= \frac{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))}{(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))}\\ &= \frac{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))}{\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)}\\ &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\end{aligned}$$

Remarques :
- Une version soustractive de cette propriété s'obtient en prenant $\theta' = -\theta$:
$(\cos\theta' + i\sin\theta')^n = \cos(n\theta') + i\sin(n\theta') \iff (\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$.
- Pour $n = 2$, on retrouve les formules de duplication étudiées en 1re :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) \iff \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$
Par identification des parties réelles et imaginaires de cette égalité, on obtient
$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$. On peut faire de même pour obtenir des formules similaires pour $n = 3$, $n = 4$, etc.

Définition 5.5 (Notation exponentielle) Tout nombre complexe non nul z peut être noté sous la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ \ [2\pi]$.
Autrement dit, $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2, re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Remarques :
- Pour les complexes de module 1, la multiplication satisfait la relation fonctionnelle
$f(x) \times f(y) = f(x+y)$ car $(\cos\theta + i\sin\theta) \times (\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$.
Or cette même relation fonctionnelle est satisfaite par la fonction exponentielle, puisque $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^a e^b = e^{a+b}$.
De plus, $\theta = 0\,[2\pi] \Rightarrow \cos\theta + i\sin\theta = 1$ et de même $a = 0 \Rightarrow, e^a = 1$.
Du fait de cette analogie, Euler proposa en 1748 de noter un élément de $\mathbb{U}$ sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec $\theta = \arg(z)\,[2\pi]$. Par extension, tout complexe de $\mathbb{C}$ est noté $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$.
- Un exemple est fameux : $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \iff e^{i\pi} + 1 = 0$.
Qualifiée de « plus belle formule des mathématiques », cette égalité rassemble cinq constantes fondamentales : les entiers 0 et 1 qui sont les éléments neutres de l'addition $(x + 0 = 0)$ et de la multiplication $(x \times 1 = x)$, les nombres transcendants π et e qui interviennent partout en mathématiques et le nombre imaginaire i qui est à l'origine du déploiement des complexes.
- Autres exemples : $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$ et $e^{0i} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$.

- Pour déterminer la forme exponentielle d'un complexe, comme pour la forme trigonométrique, on commence par déterminer le module et ensuite on identifie l'argument.
  Par exemple $z = 1 - i$ a pour module $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, du coup $z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ et l'argument θ de z vérifie $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. On en déduit $\theta = \frac{-\pi}{4}$ $[2\pi]$ et $z = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$.

PROPRIÉTÉ 5.13 (FORMULES DE EULER) Pour tous complexes $z = re^{i\theta}$ et $z' = re^{i\theta'}$:

$zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$	$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$	$\forall n \in \mathbb{Z}, z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{ni\theta}$
$\overline{z} = r \times \left(\overline{e^{i\theta}}\right) = re^{-i\theta} = \dfrac{r}{e^{i\theta}}$	$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$	$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

DÉMONSTRATION ➠ Les premières propriétés ne font que reécrire sous forme exponentielle des propriétés déjà démontrées : propriété **??** pour le conjugué et propriété **??** pour le produit, le quotient et la puissance (on reconnait dans cette dernière la formule de Moivre).

➠ Formules de Euler :
On sait que $2\mathcal{R}e(z) = z + \bar{z}$, mais comme $\mathcal{R}e(re^{i\theta}) = r\cos\theta$, on en déduit :
$r\cos\theta = \dfrac{z + \bar{z}}{2} = \dfrac{re^{i\theta} + re^{-i\theta}}{2} = r\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ d'où $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.
De même $2i\mathcal{I}m(z) = z - \bar{z}$, mais comme $\mathcal{I}m(re^{i\theta}) = r\sin\theta$, on en déduit :
$r\sin\theta = \dfrac{re^{i\theta} - re^{-i\theta}}{2i} = \frac{r(2i\sin\theta)}{2i}$ d'où $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Remarques :

- Les formules de Euler permettent de (re)trouver des formules de trigonométrie :
  $2i\sin 2\theta = e^{i2\theta} - e^{-i2\theta} = (e^{i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^2 = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 4i\cos\theta\sin\theta$ d'où, en divisant par $2i$, on retrouve la formule de duplication du sinus : $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$.
- Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, l'élévation à la puissance i de i est le réel $i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,2079$.

PROPRIÉTÉ 5.14 (HUIT FORMULES) Des formules de Euler se déduisent les suivantes :

$2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$	$2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$	$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$
$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$	$x+iy = re^{i\theta} \Longrightarrow x\cos a + y\sin a = r\cos(a-\theta)$

DÉMONSTRATION ➠Montrons que $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$:

$$\begin{aligned}
\cos a\cos b &= \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)\left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{ia+ib} + e^{-ia+ib} + e^{ia-ib} + e^{-ia-ib}}{4} \\
&= \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{4} + \frac{e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{4} \\
&= \frac{\cos(a+b)}{2} + \frac{\cos(a-b)}{2}
\end{aligned}$$

De la même façon, on peut établir que :

- $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
- $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

NB : on montre également ces formules à partir des formules d'addition (vues en 1re).

➠ Établissons un autre type de formule trigonométrique en remarquant que :

$e^{ia}+e^{ib}=e^{i\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{a+b}{2}+\frac{-(a-b)}{2}\right)}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{i\frac{-(a-b)}{2}}\right)=2e^{i\frac{a+b}{2}}\cos\frac{a-b}{2}$ et, également

$e^{ia}-e^{ib}=e^{i\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{a+b}{2}+\frac{-(a-b)}{2}\right)}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}-e^{i\frac{-(a-b)}{2}}\right)=2ie^{i\frac{a+b}{2}}\sin\frac{a-b}{2}$.

Séparons maintenant les parties réelles et imaginaires des membres extrêmes de ces égalités :

- $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ et $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
- $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ et $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

➠ Transformons une écriture de la forme $x\cos a+y\sin a$ pour tout couple $(x,y)\neq(0,0)$ en remarquant que cette expression est la partie réelle du produit $e^{ia}\,\overline{(x+iy)}$.

Supposons que le module et l'argument de $x+iy$ soient r et θ (autrement dit $x+iy=re^{i\theta}$), comme $\mathcal{R}e\left(e^{ia}\left(re^{-i\theta}\right)\right)=\mathcal{R}e\left(re^{i(a-\theta)}\right)=r\cos(a-\theta)$, on en déduit que $x\cos a+y\sin a=r\cos(a-\theta)$.

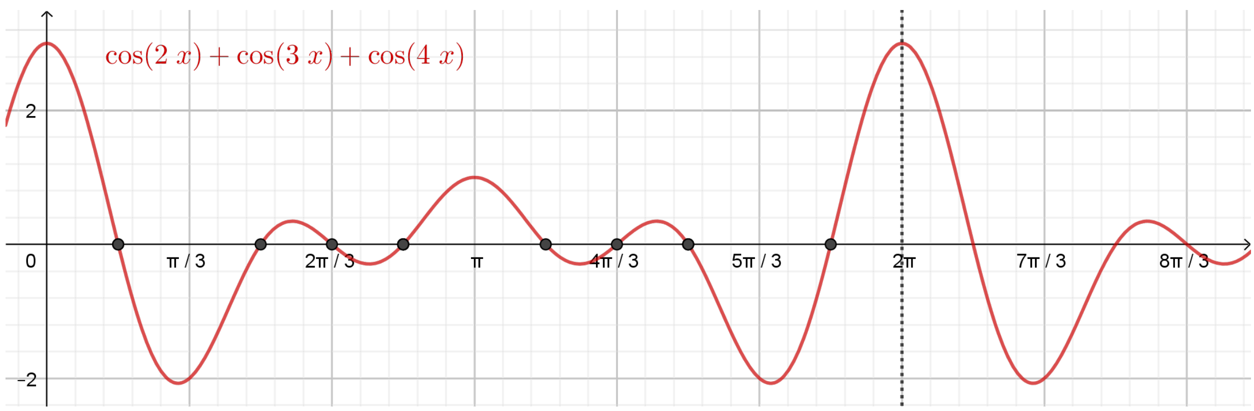
Exemple 8 – Résolvons l'équation $\sqrt{3}\cos a+\sin a=\sqrt{2}$.
Écrivons pour commencer le complexe $z=\sqrt{3}+i$ sous forme trigonométrique :
z a pour module $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$, du coup $z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$ et l'argument θ de z vérifie $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{2}$. On en déduit que $\theta=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $z=2e^{\frac{i\pi}{6}}$.
L'équation s'écrit alors $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\iff\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$.
Les solutions sont donc :

- $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\iff x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$
- $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\iff x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{12}\ [2\pi]$

Exemple 9 – Résolvons l'équation $\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$.
Remplaçons $\cos 2x+\cos 4x$ par $2\cos\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2}=2\cos 3x\cos(-x)=2\cos 3x\cos x$,
L'équation s'écrit $2\cos 3x\cos x+\cos 3x=0\iff\cos 3x(1+2\cos x)=0$.
On en déduit les solutions :

- $\cos 3x=0\iff\cos 3x=\cos\frac{\pi}{2}\iff 3x=\pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\iff x=\pm\frac{\pi}{6}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$
- $1+2\cos x=0\iff\cos x=\frac{-1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}\iff x=\pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

Dans un intervalle d'amplitude 2π, il y a huit solutions distinctes.
Voici celles de l'intervalle $[0,2\pi]$: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{9\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.
Les huit solutions sont dans l'ordre croissant : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.
On peut les retrouver graphiquement à l'intersection de la courbe d'équation $y=\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$ et de l'axe des abscisses.



Exemple 10 – Les égalités $e^{ia}+e^{ib}=2e^{i\frac{a+b}{2}}\cos\frac{a-b}{2}$ et $e^{ia}-e^{ib}=2ie^{i\frac{a+b}{2}}\sin\frac{a-b}{2}$ vues plus haut, dans le cas où $e^{ia}=1\iff a=0\ [2\pi]$ et $b=x$ s'écrivent :

- $1+e^{ix}=2e^{i\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}$
- $1-e^{ix}=2ie^{i\frac{x}{2}}\sin\frac{-x}{2}=2e^{i\frac{\pi-x}{2}}\sin\frac{-x}{2}=2e^{i\frac{x-\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}$

Application : calculons $z_n=(1+e^{ix})^n$.
Comme on sait transformer la somme $1+e^{ix}$ en produit $2e^{i\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}$, on en déduit :
$z_n=\left(2e^{i\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}\right)^n=2^ne^{i\frac{nx}{2}}\cos^n\frac{x}{2}$ d'où $\mathcal{R}e(z_n)=2^n\cos\frac{nx}{2}\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\mathcal{I}m(z_n)=2^n\sin\frac{nx}{2}\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)$.

4. Polynômes complexes

Du point de vue algébrique, l'ensemble des complexes est appelé par les mathématiciens la « clôture algébrique » du corps des réels. On entend par là que cet ensemble, noté $\mathbb{C}$, prolonge l'ensemble $\mathbb{R}$ en offrant des solutions à toutes les équations polynomiales dont les coefficients sont des réels. Du même coup, les équations polynomiales à coefficients complexes ont également leurs solutions dans $\mathbb{C}$.

4.a. Second degré

Les équations du second degré à coefficients réels ont été vues au début de ce chapitre (voir l'introduction de la définition **??** ainsi que la remarque qui la suit).

4.a.1. Racine carrée d'un complexe

Propriété 5.15 (Racines carrées) Pour tout couple de réels $(a, b) \neq (0, 0)$, l'équation $z^2 = a + ib$ admet deux solutions complexes opposées, appelées « racines carrées » de $a + ib$.

Démonstration Notons $x + iy$ un complexe satisfaisant l'équation (E) $z^2 = a + ib$.
Comme $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, par identification des parties réelles et imaginaires de (E) on obtient le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$.
L'identité des modules $|z^2| = |a + ib| \iff |z|^2 = |a + ib| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ajoute à ce système une 3e égalité qui permet, par addition et soustraction avec la 1re du système, d'obtenir le nouveau système $\begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \\ xy = \dfrac{b}{2} \end{cases}$
Comme, d'après la propriété **??**, $\forall z \in |\mathcal{R}e(z)| \leqslant |z|$, on a $|a| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, et comme $\forall a \in \mathbb{R}, a \leqslant |a|$, on en déduit $\sqrt{a^2 + b^2} - a \geqslant 0$ et donc $y^2 \geqslant 0$. Cela assure l'existence des réels $\pm y$.
D'autre part, si $a \geqslant 0$, alors $\sqrt{a^2 + b^2} + a \geqslant 0$ et si $a < 0$, comme $|a| = -a \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$ (d'après la prop. **??**) alors $\sqrt{a^2 + b^2} + a \geqslant 0$. Dans tous les cas on a donc $\sqrt{a^2 + b^2} + a \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0$. Cela assure l'existence des réels $\pm x$.
Il suffit de choisir les réels qui conviennent en fonction du signe de b qui est celui du produit xy :

- Si $b \geqslant 0$, on prend x et y de mêmes signes
- Si $b < 0$, on prend x et y de signes opposés

Exemple 11 – Quelles sont les racines carrées de $4 - 3i$?
Pour répondre, il faut résoudre l'équation $z^2 = 4 - 3i$.
Posons $z = x + iy$ et résolvons le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = -3 \end{cases}$ avec l'égalité complémentaire des modules $x^2 + y^2 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

Le système à résoudre $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ xy = \dfrac{-3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = 4 + 5 = 9 \\ 2y^2 = 5 - 4 = 1 \\ xy = \dfrac{-3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{9}{2} \\ y^2 = \dfrac{1}{2} \\ xy < 0 \end{cases}$

conduit aux deux solutions $\begin{cases} (x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}, y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}), \text{ soit } z = \dfrac{3-i}{\sqrt{2}} \\ (x = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}), \text{ soit } z = \dfrac{-3+i}{\sqrt{2}} \end{cases}$

PROPRIÉTÉ 5.16 (COORDONNÉES POLAIRES) Pour tout couple de réels (r, θ) avec $r > 0$, l'équation $z^2 = re^{i\theta}$ admet deux solutions complexes opposées telles que $\begin{cases} |z| = \sqrt{r} \\ \arg(z) = \dfrac{\theta}{2} \ [\pi] \end{cases}$

DÉMONSTRATION D'après la propriété ??, $z^2 = \left(\arg(z)e^{i\arg(z)}\right)^2 = \arg(z)^2 \times e^{i2\arg(z)}$, mais comme $z^2 = re^{i\theta}$, l'égalité des modules égaux donne $|z^2| = r \iff |z|^2 = r \iff |z| = \sqrt{r}$ tandis que l'égalité des arguments donne $2\arg(z) = \theta \ [2\pi] \iff \arg(z) = \frac{\theta}{2} \ [\pi]$.

EXEMPLE 12 – Quelles sont les racines carrées de $2e^{i\frac{2\pi}{5}}$?

Pour répondre, il faut résoudre le système $\begin{cases} |z|^2 = 2 \\ 2\arg(z) = \dfrac{2\pi}{5} \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{5} \ [\pi] \end{cases}$.

On en déduit que $z = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{5}+k\pi)}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, soit $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}} \times e^{ik\pi}$.

- Pour $k = 2k'$ (k pair), $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}} \times e^{i2k'\pi} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$
- Pour $k = 2k' + 1$ (k impair), $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}} \times e^{i(2k'+1)\pi} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}} \times e^{i\pi} = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$

4.a.2. Équation à coefficients complexes

PROPRIÉTÉ 5.17 (COEFFICIENTS COMPLEXES) Pour tout triplet de complexes $(a \neq 0, b, c)$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes qui sont, en notant δ une des racines carrées du complexe $\Delta = b^2 - 4ac$, $z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$.

DÉMONSTRATION Cela se montre comme dans $\mathbb{R}$ en factorisant la forme canonique du trinôme. La seule différence est qu'il n'y a pas à discuter selon le signe de Δ puisque c'est un complexe et un complexe n'a pas de signe mais a toujours deux racines opposées (éventuellement nulles si $\Delta = 0$), comme on vient de le voir.

EXEMPLE 13 – Résolvons l'équation $iz^2 + (1 + 3i)z + \frac{11+4i}{2} = 0$

On a $\Delta = (1 + 3i)^2 - 4i\frac{11+4i}{2} = 1 + 6i - 9 - 22i + 8 = -16i$.

Comme $-16i = 16i^3$ et $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$, on a $\Delta = 16\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^3 = 16e^{\frac{3i\pi}{2}}$.

On cherche une racine carrée δ telle que $\delta^2 = 16e^{\frac{3i\pi}{2}}$, son module est $|\delta| = \sqrt{16} = 4$ et son argument est $\arg(\delta) = \frac{3\pi}{4} \ [\pi]$. On peut donc prendre, en choisissant l'argument $\frac{3\pi}{4}$,

$\delta = 4e^{i\frac{3\pi}{4}} = 4(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}(-1 + i)$.

Les deux solutions de l'équation sont :

$z = \dfrac{-1 - 3i \pm 2\sqrt{2}(-1 + i)}{2i} = \dfrac{-i(-1 - 3i \pm 2\sqrt{2}(-1 + i))}{2} = \dfrac{i - 3 \pm \sqrt{2}(-2i - 2))}{2}$.

On trouve donc $z = \dfrac{-3}{2} - \sqrt{2} + i\left(\dfrac{1}{2} - \sqrt{2}\right)$ ou $z = \dfrac{-3}{2} + \sqrt{2} + i\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$

4.b. Factorisation d'un polynôme

La définition d'un polynôme à coefficients complexes, la factorisation de $z^n - a^n$, l'unicité de l'écriture polynômiale et la méthode d'identification des coefficients ainsi que la factorisation du polynôme $P(z)$ par $z - a$ lorsque a en est une racine, toute cette partie est reprise du cours de 1re. Les démonstrations ne seront pas refaites ici, seules les définitions et propriétés seront rappelées, en les étendant à $\mathbb{C}$.

Définition 5.6 (Polynôme) On appelle polynôme de degré n toute fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$, où les nombres $a_k, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sont des complexes tels que $a_n \neq 0$. Les nombres a_k sont les coefficients d'ordre k du polynôme P et on note le degré $\deg(P) = n$.

Propriété 5.18 (polynômes égaux) Voici trois propositions vraies et équivalentes :

(i) Deux polynômes complexes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont même degré n et que les coefficients d'ordre $k \leqslant n$ sont égaux deux à deux.

(ii) La fonction $f : z \mapsto a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ est la fonction nulle si et seulement si les coefficients $a_k, k \leqslant n$ sont tous nuls.

(iii) L'écriture du polynôme complexe $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ est unique.

Propriété 5.19 (Degré) Soient P et Q deux polynômes complexes et λ un complexe non nul :

- Le produit λP, défini par $\lambda \times P(x)$, est un polynôme de degré égal à celui de P.
- Le produit PQ, défini par $P(x) \times Q(x)$, est un polynôme de degré égal à la somme des degrés de P et de Q, soit $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- La somme $P + Q$, définie par $P(x)+Q(x)$, est un polynôme de degré inférieur ou égal au plus grand des degrés de P et de Q, soit $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Définition 5.7 (racine) Soit P un polynôme complexe et a un complexe.
Le nombre a est une racine de P (on dit aussi un « zéro » de P) si et seulement si $P(a) = 0$.

Propriété 5.20 (factorisation par $(z - a)$) Un polynôme complexe P admet le complexe a comme racine si et seulement si on peut écrire $P(z)$ sous la forme $(z - a)Q(z)$, où Q est un polynôme complexe de degré égal à $\deg(P) - 1$.

Factorisation de $z^n - a^n$:

$$z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1}) = (z - a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-k-1}$$

En particulier :

$$z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z + 1) = (z - 1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

Autre exemple :

$$\begin{aligned}
z^n - i^{3n} &= z^n - (i^3)^n = z^n - (-i)^n \\
&= (z + i)(z^{n-1} - iz^{n-2} + (-i)^2z^{n-3} + \cdots + (-i)^{n-2}z + (-i)^{n-1}) \\
&= (z + i)\sum_{k=0}^{n-1}(-i)^k z^{n-k-1}
\end{aligned}$$

Exemple 14 – La méthode des « coefficients indéterminés » utilisée largement en 1re reste valable et particulièrement utile pour factoriser un polynôme complexe du moment qu'on peut en identifier certaine(s) racine(s).

Résolvons l'équation du 3e degré $z^3+(i-2)z^2-(1+i)(2z+3)=0$ en commençant par chercher une racine réelle $z_0=x$ (les équation du 3e degré en ont toujours au moins une) ; celle-ci vérifie l'égalité $x^3+(i-2)x^2-(1+i)(2x+3)=0 \iff (x^3-2x^2-2x-3)+i(x^2-2x-3)=0$.

Comme les parties réelles et imaginaires sont nulles, on a le système $\begin{cases} x^3-2x^2-2x-3=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$

L'équation $x^2-2x-3=0$ a pour racine $\frac{2\pm\sqrt{2^2+4\times 3}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=1\pm 2$, soit 3 et -1.
L'autre équation est satisfaite pour $x=3$ car $3^3-2\times 3^2-2\times 3-3=27-18-6-3=0$ mais pas par -1 ($(-1)^3-2\times(-1)^2-2\times(-1)-3=-1-2+2-3=-4\neq 0$), du coup on peut mettre $z-3$ en facteur : $z^3+(i-2)z^2-(1+i)(2z+3)=(z-3)(az^2+bz+c)$ où a, b et c sont à déterminer.
$(z-3)(az^2+bz+c)=az^3+(b-3a)z^2+(c-3b)z+(-3c)$ or ce polynôme est égal à $z^3+(i-2)z^2-(1+i)(2z+3)=z^3+(i-2)z^2+(-2-2i)z+(-3-3i)$.
Par identification des coefficients de même degré de ces polynômes, on obtient le système

$$\begin{cases} a=1 \\ b-3a=i-2 \\ c-3b=-2-2i \\ -3c=-3-3i \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=i-2+3=1+i \text{ (la 4e égalité confirme ces valeurs)} \\ c=-2-2i+3(1+i)=1+i \end{cases}$$

Il reste à résoudre l'équation du 2e degré $z^2+(1+i)z+(1+i)=0$.
Le discriminant est $\Delta=(1+i)^2-4(1+i)=2i-4-4i=-2i-4$;
Cherchons la racine $\delta=\alpha+i\beta$ de Δ :

Comme $(\alpha+i\beta)^2=(\alpha^2-\beta^2)+i(2\alpha\beta)$, on a $\begin{cases} \alpha^2-\beta^2=-4 \\ 2\alpha\beta=-2 \end{cases}$

L'égalité des modules ajoute une 3e équation au système : $\alpha^2+\beta^2=(-2)^2+(-4)^2=20$.

Par addition et soustraction des égalités contenant les carrés, cela se réduit à $\begin{cases} \alpha^2=8 \\ \beta^2=12 \\ \alpha\beta=-1 \end{cases}$

α et β sont de signes opposés d'où $\delta=\sqrt{8}-i\sqrt{12}=2(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$ ou $\delta=-2(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$.
Les trois solutions de l'équation de départ sont finalement :

- $z_0=3$
- $z_1=\frac{-(1+i)+2(\sqrt{2}-i\sqrt{3})}{2}=\frac{-1+2\sqrt{2}+i(-1-2\sqrt{3})}{2}$
- $z_2=\frac{-(1+i)-2(\sqrt{2}-i\sqrt{3})}{2}=\frac{-1-2\sqrt{2}+i(-1+2\sqrt{3})}{2}$.

```python
def P(z):
    a=complex(1,0)
    b=complex(-2,1)
    c=complex(-2,-2)
    d=complex(-3,-3)
    return d+mult(z,(c+mult(z,(b+mult(z,a)))))
def mult(z1,z2):
    return complex(z1.real*z2.real-z1.imag*z2.imag,z1.real*z2.imag+z1.imag*z2.real)
while True:
    a=complex(int(input("partie réelle de z = ")),int(input("partie imaginaire de z = ")))
    Pa=P(a)
    if Pa==complex(0,0):
        print("{} est une racine évidente P.".format(a))
        break
    else : print("P({})={}\n".format(a,Pa))
```

```
partie réelle de z = -1
partie imaginaire de z = 0
P((-1+0j))=(-4+0j)

partie réelle de z = 0
partie imaginaire de z = 1
P(1j)=(1-7j)

partie réelle de z = 3
partie imaginaire de z = 0
(3+0j) est une racine évidente P.
```

Pour la recherche d'une racine évidente, il peut être utile de calculer les images des petits nombres entiers 0, 1, -1, 2, -2,... ou de complexes simples tels que i, $-i$, j,... Le programme très simple

ci-dessus est écrit dans ce but ; il suffit de tester jusqu'à $z = 3$ pour pouvoir factoriser le polynôme.
Le programme demande d'entrer les parties réelles et imaginaires d'un complexe z et détermine si ce nombre est une racine évidente d'un polynôme complexe du 3ᵉ degré dont on a rentré au préalable les coefficients complexes a, b, c et d.
J'ai dû programmer le produit de deux complexes car le module `complex` ne réalise pas cela par défaut et j'ai utilisé pour évaluer le polynôme la forme de Hörner [1] qui limite le nombre de produits à effectuer. On peut facilement développer cette idée en bouclant sur une liste pour modifier les parties réelles et imaginaires du complexe z.

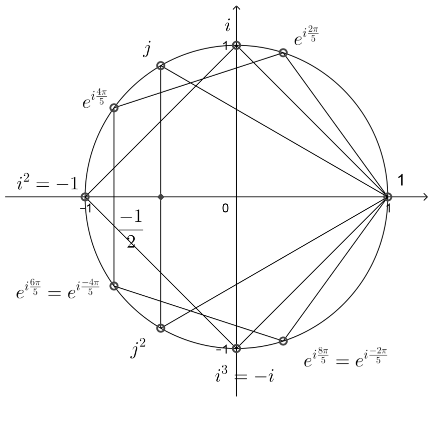
4.c. Racines de l'unité

Propriété 5.21 (racine n-ième de 1) $n > 0$ étant un entier, l'équation $z^n = 1$ admet n solutions distinctes, appelées « racines n^e de l'unité », égales à $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Démonstration Comme $z^n = 1$ alors le module de z est 1 (car $|z^n| = |z|^n = 1$),
ainsi les solutions de l'équation complexe du n^e degré s'écrivent $e^{i\theta}$ où l'argument θ vérifie
$\left(e^{i\theta}\right)^n = 1 \iff e^{in\theta} = e^{i\times 0} \iff n\theta = 0 \ [2\pi]$.
On en déduit, en divisant par n, que $\theta = 0 \ [\frac{2\pi}{n}]$ soit $\theta \in \{0, \frac{1\times 2\pi}{n}, \frac{2\times 2\pi}{n} \dots, \frac{(n-1)\times 2\pi}{n}\}$.

Remarques :

- Nous connaissons les 2 racines 2ᵉ de l'unité qui sont les nombres opposés 1 et -1.
  Nous connaissons également les 3 racines 3ᵉ de l'unité qui sont 1, j et j^2 ; ce sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.
  De même, les 4 racines 4ᵉ de l'unité sont 1, i, $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$; ce sont les affixes des sommets d'un carré inscrit dans le cercle trigonométrique ; et d'une façon générale, les n racines n^e de l'unité sont les affixes des sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique (voir ci-dessous jusqu'à $n = 5$).
- L'ensemble des racines n^e de l'unité – noté $\mathbb{U}_n$ – forme un groupe multiplicatif qui est un sous-groupe de $\mathbb{U}$ (l'ensemble des complexes de module 1, voir la propriété **??**) car le produit de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ est un élément de $\mathbb{U}_n$, et aussi l'inverse d'un élément de $\mathbb{U}_n$ est un élément de $\mathbb{U}_n$. Nous laissons les démonstrations très simples de ces propriétés au lecteur.
- En notant u la première racine n^e de l'unité d'argument non nul (modulo 2π), soit $u = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, on remarque que toutes les racines n^e de l'unité s'expriment comme des puissances de u : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, e^{i\frac{2k\pi}{n}} = u^k$. De plus, comme $u^n = e^{i\frac{2n\pi}{n}} = 1$, on en déduit que $u^n - 1 = 0$ or $u^n - 1 = (u-1)(u^{n-1} + u^{n-2} + \dots + u + 1)$ d'après la propriété **??**. On en déduit que $u^{n-1} + u^{n-2} + \dots + u + 1 = \frac{u^n - 1}{u-1} = 0$, la somme des racines n^e de l'unité est nulle.



1. La forme de William George Hörner (1819-1845) pour $a \times z \times z + b \times z + c$ est $c + z \times (b + z \times c)$, on voit que dès le 2ᵉ degré, on gagne un produit ; au 3ᵉ degré on en gagne trois ($az^3 + bz^2 + cz + d$ s'écrit $d + z(c + z(b + za))$).

Propriété 5.22 (racine n-ième) $n > 0$ étant un entier et $r \neq$ un réel, l'équation $z^n = re^{i\theta}$ admet n solutions distinctes (les « racines n^e de $re^{i\theta}$) égales à $\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, soit $\begin{cases} |z| = \sqrt[n]{r} \\ \arg z = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$. Autrement dit, en notant $u = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $z = \sqrt[n]{r}u^k e^{i(\frac{\theta}{n})}$.

Démonstration si $r = 0$ alors l'équation devient $z^n = 0$ et n'a qu'une seule racine $z = 0$.
Pour cela on suppose $r \neq 0$.
D'après la propriété **??**, on en déduit que :

- $|z^n| = |z|^n = r$ d'où $|z| = \sqrt[n]{r}$
- $\arg z^n = n \arg z \;\; [2\pi]$ d'où $\arg z = \frac{\theta}{n} \;\; [\frac{2\pi}{n}] \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \arg z = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

Remarque : On en déduit que si on arrive à déterminer une racine z_0 de l'équation $z^n = re^{i\theta}$, alors on détermine les autres en les multipliant par les racines n^e de l'unité égales à $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Autrement dit, les racines n^e de $re^{i\theta}$ sont z_0, $z_0 u$, $z_0 u^2$, $z_0 u^3$, …, $z_0 u^{n-1}$.

4.d. L'invention des algébristes italiens

Revenons aux formules qui ont tout déclenché, les formules de Tartaglia-Cardan.
L'équation réelle du 3e degré est $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, où a, b, c et d sont des réels.
En divisant par $a \neq 0$, on obtient $x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$ et, avec le changement de variable $X = x + \frac{b'}{3}$, elle se transforme en une équation de la forme $X^3 + pX + q = 0$ où le terme de degré 2 a disparu. En effet, on a :
$(x + \frac{b'}{3})^3 + p(x + \frac{b'}{3}) + q = x^3 + b'x^2 + \frac{b'^2}{3}x + \frac{b'^3}{27} + px + \frac{pb'}{3} + q = x^3 + b'x^2 + (\frac{b'^2}{3} + p)x + (\frac{b'^3}{27} + \frac{pb'}{3} + q)$,
il suffit de prendre b', c' et d' vérifiant $\begin{cases} b' = \dfrac{b}{a} \\ \dfrac{b'^2}{3} + p = c' = \dfrac{c}{a} \\ \dfrac{b'^3}{27} + \dfrac{pb'}{3} + q = d' = \dfrac{d}{a} \end{cases}$,
ce qui conduit à prendre $\begin{cases} p = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{3a^2} \\ q = \dfrac{d}{a} - [\dfrac{b^3}{27a^3} + (\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{3a^2})\dfrac{b}{3a}] = \dfrac{d}{a} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{2b^3}{27a^3} \end{cases}$
Les coefficients p et q sont, comme a, b, c et d, des réels.

Une fois cette forme trouvée, un nouveau changement de variable intervient : on pose $X = u + v$, avec u et v complexes (astuce : en prenant deux inconnues au lieu de une, on va pouvoir trouver une combinaison qui simplifie le problème).
L'équation $X^3 + pX + q = 0$ s'écrit alors :
$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \Longleftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0 \Longleftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv+p)(u+v) + q = 0$.
Comme on a le choix de la décomposition de X en $u + v$, on choisit d'avoir $3uv + p = 0$, soit $uv = -\frac{p}{3}$.
L'équation devient alors $u^3 + v^3 + q = 0$ et on doit trouver deux nombres complexes u et v tels que
$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \text{ (en élevant au cube la condition sur le produit)} \end{cases}$
On est ainsi ramené au second degré [2], car u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, où S est leur somme et P leur produit. L'équation que vérifient u^3 et v^3 est donc ici $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$.

2. C'est du faux second degré. Il s'agit plutôt du sixième degré, car on cherche u et v, non pas u^3 et v^3, et ces nombres vérifient l'équation $x^6 + qx^3 - \frac{p^3}{27} = 0$. C'est important de le souligner car une équation du sixième degré a six solutions. Il faudra sélectionner, parmi ces six nombres, celles qui conviennent.

Son discriminant est $\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3$ et les solutions $u^3 = \frac{-q+i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $v^3 = \frac{-q-i\sqrt{-\Delta}}{2}$ sont réelles si $\Delta \geqslant 0$ et complexes sinon.
D'après la propriété **??** et sa conséquence, soulignée dans la remarque, les trois racines cubiques de u^3 sont $u_0 = \sqrt[3]{\frac{-q+i\sqrt{-\Delta}}{2}}$, $u_1 = ju_0$ et $u_2 = j^2u_0$, de même pour les racines cubiques de v^3.
Il faut alors combiner deux à deux ces six solutions qui doivent avoir un produit réel, car on doit avoir $uv = -\frac{p}{3}$. Ce choix conduit aux trois solutions en $X = u + v$ et, finalement, en $x = X - \frac{b'}{3}$.

<u>**Exemple**</u> 15 – Dans le cas où l'équation $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$ a un discriminant positif, l'équation du 3ᵉ degré a une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées.
Résolvons l'équation $x^3 + 2x^2 + 3x + 5 = 0$.
Avec le changement de variable $X = x + \frac{2}{3}$, celle-ci se transforme en $X^3 + \frac{5}{3}X + \frac{97}{27} = 0$ car

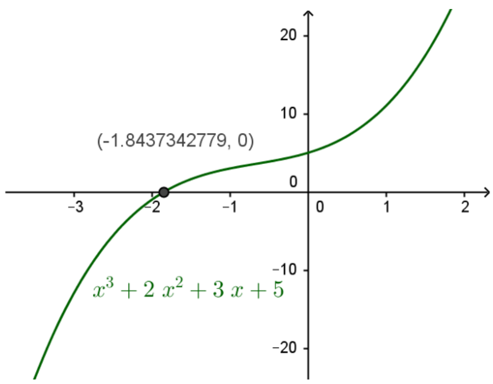
$$\begin{cases} p = 3 - \dfrac{2^2}{3} = \dfrac{9-4}{3} = \dfrac{5}{3} \\ q = 5 - \dfrac{6}{3} + \dfrac{2 \times 2^3}{27} = 3 + \dfrac{16}{27} = \dfrac{97}{27} \end{cases}$$

Après le changement de variable $X = u + v$ et $uv = -\frac{5}{9}$, on obtient l'équation $u^3 + v^3 = -\frac{97}{27}$ avec $u^3v^3 = -\frac{5^3}{27^2} = -\frac{125}{729}$. Les nombres complexes u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation $x^2 + \frac{97}{27}x - \frac{125}{729} = 0$ dont le discriminant est $\Delta = \frac{97^2+4\times125}{27^2} = \frac{9909}{729} > 0$ d'où $u^3 = \frac{-97+\sqrt{9909}}{2\times27}$ et $v^3 = \frac{-97-\sqrt{9909}}{2\times27}$.
Les racines cubiques de ces nombres réels sont réelles également :

- $u_0 = \sqrt[3]{\frac{-97+\sqrt{9909}}{2\times27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-97+\sqrt{9909}}{2}}$
- $v_0 = \sqrt[3]{\frac{-97-\sqrt{9909}}{2\times27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-97-\sqrt{9909}}{2}}$

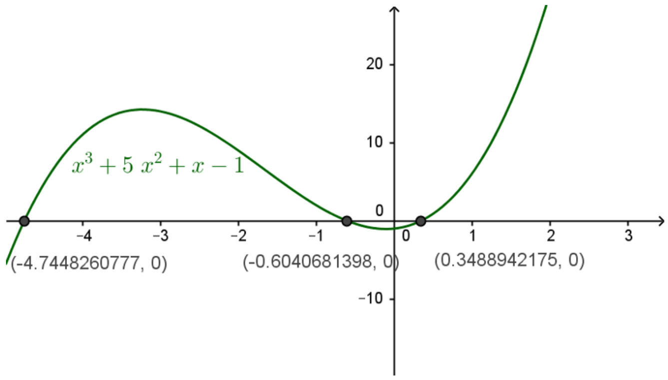
(u_0, v_0) est un couple vérifiant $uv = -\frac{5}{9}$, les deux autres couples qui conviennent sont constitués de nombres complexes conjugués : (u_0j, v_0j^2) pour le premier et (u_0j^2, v_0j) pour le second.
Il ne reste plus qu'à exprimer les solutions de l'équation de départ, sous la forme $x = u + v - \frac{b}{3a}$, c'est-à-dire ici $x = u + v - \frac{2}{3}$. La seule solution réelle est
$x_0 = \frac{\sqrt[3]{-97+\sqrt{9909}}+\sqrt[3]{-97-\sqrt{9909}}}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{2}{3} \approx -1,8437342779$
On peut vérifier cette valeur en traçant la courbe d'équation $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$.
Cette courbe coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse approximative $-1,8437342779$, ce qui correspond bien à la valeur trouvée. Les deux autres solutions sont les complexes :

- $x_1 = \frac{j\sqrt[3]{-97+\sqrt{9909}}+j^2\sqrt[3]{-97-\sqrt{9909}}}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{2}{3} \approx -0.078 + 1.645i$
- $x_2 = \frac{j^2\sqrt[3]{-97+\sqrt{9909}}+j\sqrt[3]{-97-\sqrt{9909}}}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{2}{3} \approx -0.078 + 1.645i$



Ces valeurs n'apparaissent pas sur la représentation graphique, car celle-ci ne prend en abscisse que des valeurs réelles.

<u>**Exemple**</u> 16 – Dans le cas où $\Delta < 0$, les trois solutions de l'équation de départ sont réelles.
Résolvons l'équation $x^3 + 5x^2 + x - 1 = 0$ qui a trois solutions réelles si on en juge par les trois points d'intersection de la courbe d'équation $y = x^3 + 5x^2 + x - 1$ avec l'axe des abscisses.



Le changement de variable $X = x + \frac{5}{3}$ conduit à l'équation $X^3 - \frac{22}{3}X + \frac{178}{27} = 0$.
On pose ensuite $X = u + v$ avec $uv = \frac{22}{9}$, et on on est ramené à chercher deux complexes u^3 et v^3 solutions de l'équation $x^2 + \frac{178}{27}x + \frac{10648}{729} = 0$.
Le discriminant est $\Delta = \frac{178^2-4\times 10648}{729} = -\frac{10908}{729} < 0$.
Le premier couple (u_0,v_0) vérifiant $uv = \frac{22}{9}$ est donc un couple de nombres complexes.

- $u_0 = \sqrt[3]{\frac{-178+i\sqrt{10908}}{2\times 27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-178+i\sqrt{10908}}{2}}$
- $v_0 = \sqrt[3]{\frac{-178-i\sqrt{10908}}{2\times 27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-178-i\sqrt{10908}}{2}}$

Les deux autres couples sont $(u_0 j, v_0 j^2)$ et $(u_0 j^2, v_0 j)$.
Les solutions de l'équation de départ sont les nombres réels :

- $x_0 = \frac{\sqrt[3]{-178+i\sqrt{10908}}+\sqrt[3]{-178-i\sqrt{10908}}}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{5}{3} \approx 0,3489$
- $x_1 = \frac{j\sqrt[3]{-178+i\sqrt{10908}}+j^2\sqrt[3]{-178-i\sqrt{10908}}}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{5}{3} \approx -4,7448$
- $x_2 = \frac{j^2\sqrt[3]{-178+i\sqrt{10908}}+j\sqrt[3]{-178-i\sqrt{10908}}}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{5}{3} \approx -0,6041$

Remarque n°1 : Déterminer la racine cubique d'un nombre complexe n'est pas une tâche facile en général, surtout si l'on ne veut pas se satisfaire de valeurs approchées. Si on écrit un nombre complexe $a + ib$, alors son carré est $a^2 - b^2 + i(2ab)$ et son cube $a(a^2 - 2b^2) + i3b(a^2 - b^2)$.
Par conséquent, la racine cubique d'un nombre $A + iB$ est le nombre $z_0 = a + ib$ tel que
$\begin{cases} A = a(a^2-2b^2) \\ B = 3b(a^2-b^2) \end{cases}$. Ce système conduit aux trois complexes solutions : z_0, jz_0 et $j^2 z_0$.
En dehors de certains cas particuliers, on ne sait pas exprimer, en général, les valeurs de a et b – la partie réelle et imaginaire de la racine cubique d'un complexe – de façon algébrique, sans les radicaux. Bien sûr le problème se simplifie beaucoup lorsqu'on arrive à identifier la forme trigonométrique du nombre z_0.

Remarque n°2 : Lorsque l'équation du troisième degré a une solution réelle évidente, le passage par $\mathbb{C}$ n'est pas obligatoire, et il complique notablement l'expression des solutions.
L'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, pour donner un exemple historique résolu par Bombelli en 1560, a une solution évidente qui est $x = 4$, et deux autres solutions réelles $-2+\sqrt{3}$ et $-2-\sqrt{3}$ que l'on trouve en factorisant le polynôme initial : $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2+4x+1)$.
La méthode de Tartaglia-Cardan exprime les racines comme la somme de racines cubiques de nombres complexes : l'équation que doit vérifier u^3 et v^3 est ici $x^2 - 4x + 125 = 0$, son discriminant étant négatif ($\Delta = 16 - 500 = -484 = -22^2$), on en déduit le couple de complexes $(u_0,\ v_0)$ suivant :

- $u_0 = \sqrt[3]{\frac{4+22i}{2}} = \sqrt[3]{2+11i}$
- $v_0 = \sqrt[3]{\frac{4-22i}{2}} = \sqrt[3]{2-11i}$

La 1re solution qui s'en déduit est le complexe $\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$, or ce nombre est égal à 4, cela se prouve en développant $(2+i)^3 = (3+4i)(2+i) = 2+11i$ et $(2-i)^3 = (3-4i)(2-i) = 2-11i$.
Les autres solutions ne sont pas moins réelles que la première, mais la méthode de Cardan en donne à nouveau, des expressions complexes : $j\sqrt[3]{2+11i} + j^2\sqrt[3]{2-11i}$ et $j^2\sqrt[3]{2+11i} + j\sqrt[3]{2-11i}$

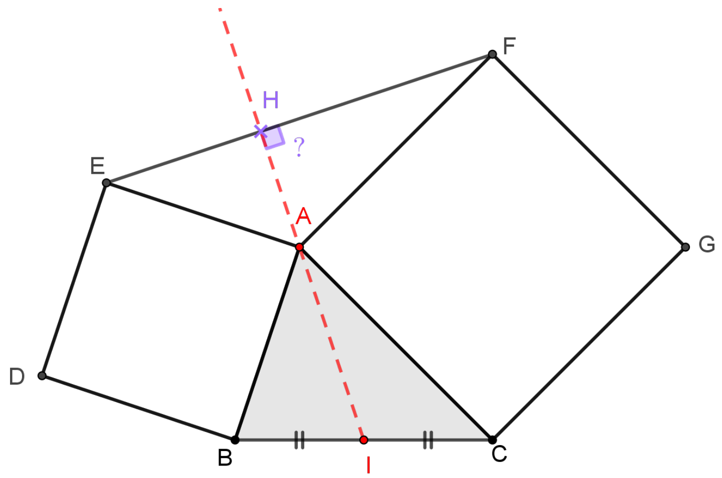
5. Applications des complexes

En dehors des équations polynomiales et autres questions algébriques qui furent le point de départ des nombres complexes, de multiples applications utilisent ces nombres comme des outils pour résoudre autrement, représenter ou étudier certains problèmes. Nous envisagerons deux domaines : la géométrie et les suites.

5.a. Applications en géométrie

Les propriétés **??** et **??**, notamment dans les remarques associées, établissent plusieurs points importants qui permettent de résoudre des problèmes de géométrie.
Développons cet aspect sur deux exemples.

<u>**Exemple**</u> 17 (Figure de Vecten) – Soit ABC un triangle de sens direct (le sens $A \to B \to C$ est trigonométrique).
On construit des carrés $ABDE$ et $ACGF$ sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$, plus précisément E est l'image de B par une rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ (ce qu'on notera $E = r_{A,\frac{-\pi}{2}}(B)$) et F est l'image de C par une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ($F = r_{A,\frac{\pi}{2}}(C)$). Montrons que la médiane issue de A dans le triangle ABC est la hauteur issue de A dans le triangle AEF.



Notons a, b et c les affixes de A, B et C.

- La rotation $r_{A,\frac{-\pi}{2}}$ transforme un point $M(z)$ en $M'(z')$ de telle façon que le rapport des affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ ($\overrightarrow{AM'}(z'-a)$ et $\overrightarrow{AM}(z-a)$) soit égal au complexe $e^{i\frac{-\pi}{2}} = -i$.
  On a donc la traduction complexe de cette rotation : $\frac{z'-a}{z-a} = -i \iff z'-a = -i(z-a)$.
  Comme $E = r_{A,\frac{-\pi}{2}}(B)$, on a $z_E - a = -i(z_B - a) = -i(b-a) \iff z_E = a - i(b-a)$.
- De même, la rotation $r_{A,\frac{\pi}{2}}$ a pour expression complexe $\frac{z'-a}{z-a} = i \iff z'-a = i(z-a)$ et donc, comme $F = r_{A,\frac{\pi}{2}}(C)$, on a $z_F - a = i(z_C - a) = i(c-a) \iff z_F = a + i(c-a)$.

Notons I le milieu de $[BC]$, son affixe est $z_I = \frac{b+c}{2}$.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{EF}$ est $z_{\overrightarrow{EF}} = z_F - z_E = a + i(c-a) - (a - i(b-a)) = i(-2a+b+c)$.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$ est $z_{\overrightarrow{AI}} = z_I - z_A = \frac{b+c}{2} - a = \frac{1}{2}(-2a+b+c)$.
On en déduit que $z_{\overrightarrow{EF}} = 2iz_{\overrightarrow{AI}} \iff \frac{z_{\overrightarrow{EF}}}{z_{\overrightarrow{AI}}} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Cela signifie que l'angle $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{2}$ (les droites (EF) et (AI) sont donc bien perpendiculaires) et aussi que $EF = 2AI$ (ce résultat non cherché est donné en supplément).

<u>Remarque :</u> On simplifie le raisonnement en choisissant l'origine du repère en A.
Dans un tel repère, les points ont pour affixes $A(0)$, $B(b)$, $C(c)$, $I(\frac{b+c}{2})$, $E(-ib)$ et $F(ic)$.
Du coup, les affixes des vecteurs sont $\overrightarrow{EF}(i(b+c))$ et $\overrightarrow{AI}(\frac{b+c}{2})$.

On calcule alors $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AI}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{EF}}}{z_{\overrightarrow{AI}}}\right) = \arg\left(\frac{i(b+c)}{\frac{b+c}{2}}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$, et on conclut.

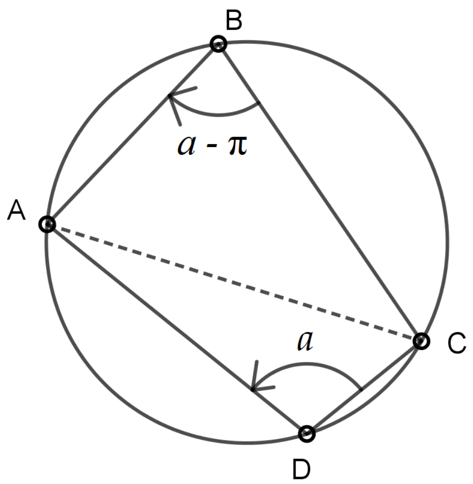
<u>Exemple</u> 18 (Théorème de Ptolémée) – A, B, C et D étant quatre points distincts, montrons qu'on a $AC \times BD \leqslant AB \times CD + AD \times BC$. Puis, en interrogeant les cas d'égalité de cette formule, montrons que quatre points distincts sont cocycliques ou alignés si et seulement si
$AB \times CD \pm AC \times BD \pm AD \times BC = 0$ (pas les deux + en même temps).

Notons a, b, c et d les affixes de A, B, C et D.
Ce théorème apparait ici comme une application de l'inégalité triangulaire de la propriété **??** :
En effet, $AB \times CD + AD \times BC = |b-a||d-c| + |c-b||d-a| = |(b-a)(d-c)| + |(c-b)(d-a)|$ (d'après la propriété **??**).
Et d'après l'inégalité triangulaire, $|(b-a)(d-c)| + |(c-b)(d-a)| \geqslant |(b-a)(d-c) + (c-b)(d-a)|$.
Développons et réduisons :
$(b-a)(d-c)+(c-b)(d-a) = bd+ac-ad-bc+cd+ab-bd-ac = -ad-bc+cd+ab = (a-c)(b-d)$
On en déduit :

$$\begin{aligned} AB \times CD + AD \times BC \geqslant |(a-c)(b-d)| &\iff AB \times CD + AD \times BC \geqslant |a-c| \times |b-d| \\ &\iff AB \times CD + AD \times BC \geqslant AC \times BD \end{aligned}$$

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si l'un des vecteurs est nul ou s'ils sont colinéaires et de même sens. Ici les affixes des vecteurs concernés sont $(b-a)(d-c)$ et $(c-b)(d-a)$ qui ne sont pas nuls car les points sont distincts. L'égalité a donc lieu lorsque les vecteurs sont colinéaires et de même sens, c'est-à-dire lorsque le rapport de leurs affixes est un réel strictement positif (la partie imaginaire de ce rapport étant le déterminant des vecteurs). On doit donc avoir :

$$\begin{aligned} \frac{(b-a)(d-c)}{(c-b)(d-a)} \in \mathbb{R}^+ \iff \frac{(b-a)(d-c)}{(b-c)(d-a)} \in \mathbb{R}^- \iff \frac{\frac{b-a}{b-c}}{\frac{d-a}{d-c}} \in \mathbb{R}^- & \\ \iff \arg\left(\frac{\frac{b-a}{b-c}}{\frac{d-a}{d-c}}\right) = \pi \ [2\pi] \iff \arg\left(\frac{b-a}{b-c}\right) = \arg\left(\frac{d-a}{d-c}\right) + \pi \ [2\pi] & \\ \iff (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) + \pi \ [2\pi] & \end{aligned}$$



Cette dernière égalité traduit une situation de cocyclicité décrite par le théorème de l'angle inscrit (dans le cas d'un birapport négatif comme ici, les points B et D sont de part et d'autre de la droite (AC), voir la figure) ou d'alignement (avec $B \in [AC] \Longrightarrow D \notin [AC]$ ou $D \in [AC] \Longrightarrow B \notin [AC]$).
Sans tenir compte du sens, il y a trois ordres possibles pour quatre points ($A \to B \to C \to D$,
$A \to B \to D \to C$ et $A \to C \to B \to D$),
d'où les trois possibilités pour avoir A, B, C et D cocycliques ou alignés :

- $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$
- $AD \times BC = AB \times CD + AC \times BD$
- $AB \times CD = AC \times BD + AD \times BC$

5.b. Étude de suites

5.b.1. Suites récurrentes d'ordre 2

Pour chercher le terme général d'une suite $(u_n)_{\leqslant 0}$ récurrente d'ordre 2, c'est-à-dire définie par une relation du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où a et b ne sont pas nuls, on cherche à écrire cette relation sous la forme $u_{n+2} - ru_{n+1} = s(u_{n+1} - ru_n)$ car ainsi, la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - ru_n$ est une suite géométrique de raison s.

Comme $u_{n+2} - ru_{n+1} = s(u_{n+1} - ru_n) \iff u_{n+2} = (r+s)u_{n+1} - rsu_n$, on doit avoir $\begin{cases} r+s=a \\ rs=-b \end{cases}$.

Il faut choisir r et s solutions de l'équation $x^2 - ax - b = 0$ et selon les cas :

- Si l'équation admet deux racines réelles distinctes, alors les suites cherchées ont pour terme général $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$
- Si l'équation admet une seule racine réelle $r = \frac{a}{2}$, alors les suites cherchées ont pour terme général $u_n = (\alpha + n\beta)r^n$, autrement dit la suite $(\frac{u_n}{r^n})$ est arithmétique.
- Si l'équation n'admet aucune racine réelle (si $a^2 + 4b < 0$), elle en admet deux complexes avec lesquelles on exprime $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$, voyons cela sur un exemple.

Exemple 19 – Étudions la suite $(u_n)_{\leqslant 0}$ définie par la relation $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ et les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Cherchons r et s tels que $\begin{cases} r+s=2 \\ rs=-2 \end{cases}$: ce sont les solutions de $x^2 - 2x + 2 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4 < 0$. Les solutions sont $\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1}$, soit $1+i$ et $1-i$.

Posons $\begin{cases} r = 1+i \\ s = 1-i \end{cases}$; comme ces deux solutions sont interchangeables :

- d'une part on a $u_{n+1} - ru_n = s(u_n - ru_{n-1}) = s^n(u_1 - ru_0) = s^n$ (car $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$)
- et d'autre part $u_{n+1} - su_n = r(u_n - su_{n-1}) = r^n(u_1 - su_0) = r^n$

Par soustraction des membres extrêmes, on obtient
$(u_{n+1} - ru_n) - (u_{n+1} - su_n) = s^n - r^n \iff (s-r)u_n = s^n - r^n$
Ainsi, en remplaçant r et s par leurs valeurs :
$(1-i-1-i)u_n = (1-i)^n - (1+i)^n \iff -2iu_n = (1-i)^n - (1+i)^n \iff u_n = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i}$.
Écrivons $r = 1+i$ et $s = 1-i$ sous forme exponentielle : $|r| = |s| = \sqrt{2}$ et,
comme $\cos(\arg r) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\arg r) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $\arg r = \frac{\pi}{4}$;
de même comme $\cos(\arg s) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\arg s) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, on a $\arg sr = \frac{-\pi}{4}$.
On en déduit $u_n = \dfrac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n - (\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}})^n}{2i} = (\sqrt{2})^n \dfrac{e^{i\frac{n\pi}{4}} - e^{i\frac{-n\pi}{4}}}{2i}$.
Cette dernière égalité peut être réduite à l'aide de la formule de Euler en $u_n = (\sqrt{2})^n \sin(\frac{n\pi}{4})$.
Malgré le passage par des nombres complexes et irrationnels, tous les nombres de la suites (u_n) sont entiers puisque la relation de récurrence initiale ne fait qu'ajouter ou multiplier des entiers.

5.b.2. Série trigonométrique

Nous étudions ici certaines suites (S_n) dont le terme général est la somme des premiers termes d'une suite (u_n), soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. En particulier lorsque les nombres complexes permettent d'exprimer S_n d'une façon simplifiée.

Exemple 20 – On définit la suite $(S_n)_{n>0}$ par $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$.
Posons $z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} = e^{i\frac{\pi}{n}}$.
On sait que la somme $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$ mais comme $z^n = e^{i\frac{n\pi}{n}} = e^{i\pi} = -1$, on en déduit $S = \dfrac{1-(-1)}{1-z} = \dfrac{2}{1-z}$.
Mais comme $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ et $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, on peut écrire
$1 - z = (1 - \cos\frac{\pi}{n}) - i(\sin\frac{\pi}{n}) = 2\sin^2\frac{\pi}{2n} - i(2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}) = 2\sin\frac{\pi}{2n}(\sin\frac{\pi}{2n} - i\cos\frac{\pi}{2n})$.

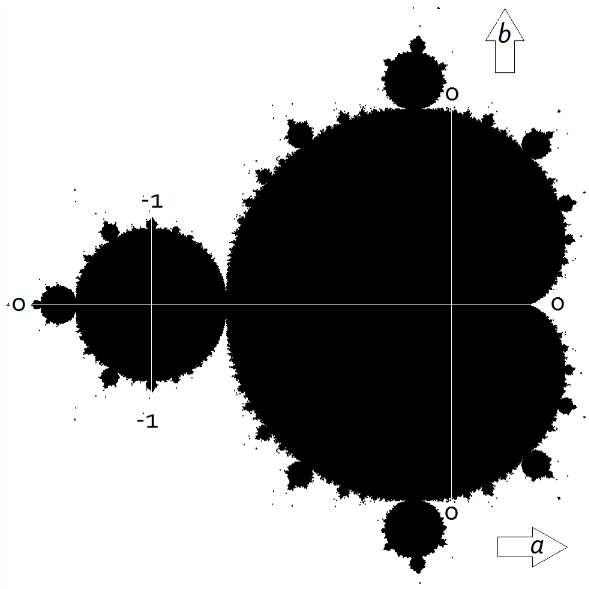
On en déduit $S = \dfrac{2}{2\sin\frac{\pi}{2n}(\sin\frac{\pi}{2n} - i\cos\frac{\pi}{2n})} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2n} + i\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 1 + \dfrac{i}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.
Comme $S_n = \mathcal{I}m(S)$, on obtient finalement $S_n = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

5.b.3. L'ensemble de Mendelbrot

Cet ensemble, appelé simplement M dans la suite, a été découvert au début du 20e siècle par les mathématiciens Pierre Fatou et Gaston Julia, mais ne fut connu du grand public qu'après que Benoît Mandelbrot (1924-2010) en produise des images à l'aide d'un ordinateur (1980) et que le magazine *Scientific American* les publie (1985).
Pour tout nombre complexe $c = a + bi$, on définit la suite complexe (z_n) par la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n^2 + c$ avec $z_0 = 0$. Selon la valeur de c, on observe deux comportements de la suite (z_n) :

- elle a tendance à rester bornée $(\exists\lambda \in \mathbb{R}^+, \forall n > n_0, |z_n| < \lambda)$
- elle diverge, les modules se mettant à croître indéfiniment $(\forall\lambda \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |z_n| > \lambda)$

L'ensemble M contient tous les points c pour lesquels la suite est bornée.
Si on colore les points de cet ensemble en noir, on obtient l'image désormais célèbre ci-dessous. J'ai ajouté une ébauche de graduation afin de remarquer que l'essentiel de cet ensemble semble limité au domaine $-1,5 < a < 0,5$ et $-1 < b < 1$.



Bien sûr, la vérification du fait que la suite est bornée, lorsqu'on utilise un ordinateur, ne peut pas être faite jusqu'à l'infini. Il faut se contenter d'effectuer pour chaque point d'affixe c (chaque pixel de l'image que l'on veut créer), un nombre limité t d'itérations. Le paramètre t est appelé « profondeur » de la représentation.
Pour l'image globale ci-dessus, la profondeur $t = 100$ a suffi.
Choisir $t = 1000$ permettrait d'obtenir des détails du bord mais impliquerait beaucoup plus de calculs et demanderait beaucoup plus de temps (d'où la lettre t).
Heureusement, cette suite a une propriété qui évite d'aller à chaque fois jusqu'à t :
Si il existe un rang n_0 à partir duquel $|z_n| > 2$, alors la suite diverge et le point d'affixe c n'appartenant pas à M reste en blanc. Seuls les points suspectés jusqu'au bout d'appartenir à M nécessitent d'aller jusqu'à t et seront coloriés en noir.

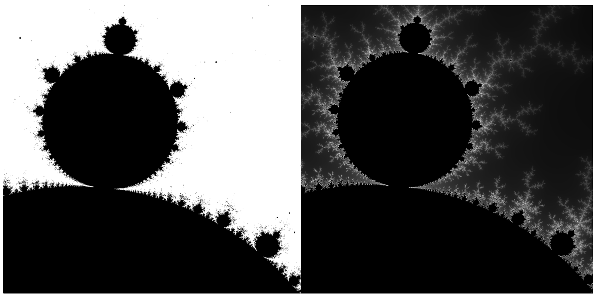
```
Re(c) = 1
Im(c) = 1
rang 1:  1.0+1.0i - module=1.4142135623730951
rang 2:  1.0+3.0i - module=3.1622776601683795
rang 3:  -7.0+7.0i - module=9.899494936611665
rang 4:  1.0-97.0i - module=97.0051545022222
rang 5:  -9407.0-193.0i - module=9408.979647124337
rang 6:  88454401.0+3631103.0i - module=88528899.0401745
rang 7:  7810996147272193.0+642374081668607.0i - module=7837365965265411.0
```

```
Re(c) = -0.5
Im(c) = 0.5
rang 1:  -0.5+0.5i - module=0.7071067811865476
rang 2:  -0.5+0.0i - module=0.5
rang 3:  -0.25+0.5i - module=0.5590169943749475
rang 4:  -0.6875+0.25i - module=0.7315437444199766
rang 5:  -0.08984375+0.15625i - module=0.180238624922802
rang 6:  -0.516342163085937 5+0.471923828125i - module=0.6995150669802755
rang 7:  -0.4561028701718896 6+0.0126516595482826 23i - module=0.456278306155
rang 8:  -0.292130236310 29+0.48845908353518 14i - module=0.569150552362672 5
rang 9:  -0.653252201321323 4+0.214612664997919 53i - module=0.6876023811103 7
rang 10:  -0.1193201574463543 2+0.2196076083173466 6i - module=0.249929593293
 ....
rang 95:  -0.4730460259734365+0.304155320279019 5i - module=0.5623904351456 3
rang 96:  -0.3687379161647718+0.212241068926664 1i - module=0.4254573094408 7
rang 97:  -0.4090786205215947+0.343477341038796 35i - module=0.534155409571 9
rang 98:  -0.450631366039230 7+0.218981526294847 74i - module=0.501020495505 7
rang 99:  -0.344884280800037 97+0.302640111336794 1i - module=0.458842243187 0
rang 100:  -0.4726458698469876 4+0.291248365720732 7i - module=0.55517540365 0
```

Observons ci-dessus le comportement de la suite (z_n) pour deux valeurs de c :

- Lorsque $c = 1 + i$, dès la 2e itération, le module dépasse 2. À la 4e étape il atteint déjà presque 100, et à la 6e presque le million...
- Pour $c = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, après $t = 100$ itérations, le module n'a toujours pas dépassé 1. Il a oscillé gentiment entre $0,18$ et $0,73$ approximativement. Si on augmente le nombre d'itérations, pour 1000 d'entre elles, les oscillations du module ne sortent pas de ces limites. Les plus grands écarts sont au début, et la valeur des z_n se stabilise progressivement sur une valeur limite qui est, dans le cas de $c = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, d'environ $-0,409 + 0,275i$.

L'algorithme qui est nécessaire pour effectuer cette exploration est extrêmement simple. De plus, la plupart des environnements de programmation ont implémenté le type « nombre complexe » et il suffit, par exemple, d'écrire z^2 pour avoir le carré de z et $|z|$ ou $abs(z)$ pour en avoir le module.
Le caractère fractal de l'image apparaît lorsqu'on cherche à agrandir une des zones frontière entre M et le reste du plan complexe. L'image ci-dessous montre un tel agrandissement, obtenu en zoomant d'un facteur 10 la partie supérieure de M pour laquelle $-0,15 \leqslant a < -0,05$ et $-0,9 \leqslant b < -0,8$.



NB : Sur ces images, les ordonnées croissent vers le bas. À droite la convention de coloration est différente : en dehors de M, la couleur va du blanc lorsque l'échappement est obtenu pour $n = t - 1$, au noir lorsque l'échappement est obtenu pour $n = 1$. Avec ce nuancier de gris, le contraste est maximum entre l'intérieur et l'extérieur de M et on voit se dessiner des lignes extrêmement fines qui irriguent l'espace extérieur. Il est bien sûr possible de créer un nuancier de couleurs en exploitant toute la palette RGB comme sur l'image ci-dessous (Wikipedia) qui montre un détail de M centré sur la valeur $-0,068 + 0,662i$ pour $t = 300$.