3 Fontions (2) : primitives et intégration

Plan du chapitre :

Aperçu historique : L'analyse moderne – l'étude du calcul infinitésimal qui contient le calcul différentiel (dérivées, etc.) et le calcul intégral (primitives, intégrales, etc.) – a débuté avec les travaux de Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) puis des frères Bernoulli (Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748)). Bien sûr, on peut trouver des travaux précurseurs, chez Archimède (287-212 av. J.-C.) notamment, avec ses calculs d'aires ou de volumes, ou Pierre Fermat (vers 1605-1665) qui, avec sa méthode des *maximis et minimis* étudie la quadrature de la parabole dont on trouve les prémisses dans Apollonius (240–190 av. J.-C.).
Résoudre des problèmes de tangentes mène invariablement à une équation différentielle ce qui fait que les problèmes posés par ce type d'équation sont aussi vieux que l'analyse. L'inconnue de ce type d'équation est une fonction, un objet familier pour nous mais dont le statut était encore assez flou pour les mathématiciens des débuts.
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) développe la méthode de décomposition en éléments simples ; le nombre d'équations différentielles qu'on sait résoudre à son époque par cette voie est assez faible mais progresse. Les Bernoulli savent intégrer l'équation linéaire et quelques autres du premier ordre. Riccati résout en 1722 le cas de l'équation $y' = ay^2 + bx^n$.
Si un problème de géométrie se réduisait à une équation différentielle, on cherchait alors à la résoudre graphiquement. Cette technique fut développée par Clairaut, D'Alembert, Euler ou encore Lagrange. Clairaut remarque, en 1734, l'existence d'une solution singulière à l'équation $y - xy' + f(y') = 0$. D'Alembert, en 1748, trouve un second cas d'intégrale singulière mais c'est Euler et Lagrange qui solutionnent le cas général. En 1743 Euler forme ce qu'on appelle aujourd'hui l'équation caractéristique : les solutions sont de la forme e^rx où les r sont solutions d'une équation polynomiale. Un peu plus tard, il trouve comment obtenir toutes les intégrales lorsqu'une racine r de l'équation caractéristique est multiple : il faut les chercher de la forme x^ke^rx.
On sait, dès la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle, intégrer les équations différentielles linéaires du premier et du second ordre à coefficients constants par des sommes d'exponentielles mais il faut attendre 1760 pour que la théorie vienne à bout des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre quelconque.

Le calcul intégrale commence, on l'a dit avec les travaux d'Archimède et se précise au XVII$^{\text{e}}$ siècle avec Leibniz et Newton. Le « S long » : $\int$, aussi appelé « signe intégrateur », a été introduit par Leibniz. Au-delà de la simple introduction proposée en classe de terminale de l'intégrale de Riemann – du nom de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) qui en achève l'étude – le concept d'intégrale a été considérablement développé avec les intégrales curvilignes, les intégrales multiples, les intégrales de surfaces, les intégrales des formes différentielles, les intégrales de Lebesgue, les intégrales de Kurzweil-Henstock.

1. Primitives

1.a. Primitives d'une fonction continue

DÉFINITION 3.1 (PRIMITIVE) Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une fonction F est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout $x \in I$ on a

$$F'(x) = f(x)$$

Remarques :

- On comprend bien que si F est une primitive de f sur I alors, pour tout réel k, $F + k$ est également une primitive de f sur I car $(F + k)'(x) = F'(x) + (k)' = F'(x) = f(x)$.
  Par exemple la fonction $F : x \longmapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de la fonction identité $f : x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x = f(x)$ pour tout réel. Mais alors les fonctions F_k définies sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = \frac{x^2}{2} + k$ sont toutes des primitives de la même fonction identité.
- D'après ce que l'on sait de la dérivation des fonctions, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction cos est sin, une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction ln est la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ est la fonction $x \longmapsto e^x$, etc.
- Dans le langage des équations différentielles, dire que F est une primitive de f sur un intervalle I où elle est définie c'est dire que F est une solution de l'équation différentielle $F'(x) = f(x)$. On note aussi cette équation différentielle $y' = f(x)$ où la fonction « inconnue » est y, celle-ci étant définie uniquement par le fait que sa dérivée y' égale une certaine fonction f de la variable x. Pour indiquer que la dérivation se fait par rapport à cette variable x (et non une autre éventuellement présente), les physiciens utilisant la notation $\frac{dy}{dx}$, noteront l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

PROPRIÉTÉ 3.1 Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

DÉMONSTRATION Cette propriété est pour l'instant admise. Elle sera démontrée dans la propriété 3.11 .

PROPRIÉTÉ 3.2 Soit F une primitive de la fonction f sur un intervalle I.
Toutes les primitives de f sur I s'écrivent $F_k = F + k$ où k est un réel quelconque.

DÉMONSTRATION Notons G une primitive de f sur I. On a alors $G'(x) = f(x)$.
Comme par ailleurs F est une primitive de f sur I, on a aussi $F'(x) = f(x)$.
On a donc $F'(x) = G'(x) \iff G'(x) - F'(x) = 0 \iff (G' - F')(x) = 0 \iff (G - F)'(x) = 0$ sur I.
On en déduit que la fonction $G - F$ est une fonction constante
$(G - F)(x) = k \iff G(x) - F(x) = k \iff G(x) = F(x) + k$ où k est un réel quelconque.

PROPRIÉTÉ 3.3 (UNICITÉ) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel de I et y_0 un réel quelconque. Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

DÉMONSTRATION D'après la propriété 3.1, comme f est une fonction continue sur I, il en existe une primitive F sur I et, d'après la propriété 3.2, toutes les primitives de f sur I s'écrivent $F + k$ où k est un réel quelconque. Pour avoir $F_k(x_0) = F(x_0) + k = y_0$, il faut et il suffit de prendre $k = y_0 - F(x_0)$; l'unique fonction F_k ainsi définie vérifie bien les contraintes imposées.

Exemple 1 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

Montrons que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{-1}{e^x+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

F est définie sur $\mathbb{R}$, dérivons cette fonction qui est du type $\dfrac{1}{u}$ avec $u = -(e^x+1)$ et $u' = -e^x$.

Sa dérivée est $\dfrac{-u'}{u^2}$, donc $F'(x) = \dfrac{-(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = \dfrac{-(-e^x)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} = f(x)$.
F donc est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Déterminons la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -1 en 0.
Toutes les primitives de f s'écrivent $F_k(x) = F(x) + k = \dfrac{-1}{e^x+1} + k$.

Pour avoir $F_k(0) = -1$, il faut et il suffit d'avoir $\dfrac{-1}{e^0+1} + k = -1 \iff k = -1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{2}$.

Conclusion : la fonction $F_{\frac{-1}{2}}(x) = \dfrac{-1}{e^x+1} + \dfrac{-1}{2} = \dfrac{-2-(e^x+1)}{2(e^x+1)} = \dfrac{-3-e^x}{2(e^x+1)}$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -1 en 0.

Propriété 3.4 Soient F et G des primitives de deux fonctions f et g définies sur un intervalle I et λ un réel quelconque.

- La fonction $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I
- La fonction λF est une primitive de λf sur I

D'une façon générale, $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

Démonstration C'est immédiat connaissant les propriétés de la dérivation :
$(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g$.

1.b. Recherche de primitives

Le tableau qui suit donne des fonctions f continues sur un intervalle I ou un intervalle $J \subset I$.
Les fonctions F sont les primitives des fonctions f, k étant une constante additive quelconque.

$f(x) =$	$F(x) =$	I
$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x + k$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{Z} - \{0,-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -2$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln x + k$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}\ \ [\pi]\}$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$

Remarques :

- D'après la propriété 3.4, on en déduit les primitives de toute fonction polynôme puisqu'il s'agit d'une combinaison linéaire de fonctions $x \longmapsto x^n$ dont on connait une primitive pour $n \in \mathbb{N}$. Par exemple les primitives du trinôme $p(x) = ax^2 + bx + c$ sont les polynômes $P(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{1}x + d$ avec $d \in \mathbb{R}$. Plus généralement, les primitives d'un polynôme de degré n (le coefficient a_n du terme dominant doit être non nul) sont des polynômes de degré $n+1$ (le coefficient du terme dominant est alors $\frac{a_n}{n+1}$).
- Une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$; cette propriété est valable pour $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ (pour $n = 0$ elle se réduit au cas particulier de la primitive de $\alpha = 1$) et aussi pour un réel $a \neq -1$ quelconque car, en notant x^a sous la forme $e^{a \ln x}$ et en utilisant la dérivée d'une fonction composée, on montre que la dérivée de $\frac{e^{(a+1)\ln x}}{a+1}$ est $\frac{(a+1)e^{(a+1)\ln x}}{x(a+1)} = \frac{e^{(a+1)\ln x}}{x} = \frac{x^{a+1}}{x} = x^a$ ce qui signifie que $x^a = e^{a \ln x}$ a pour primitive $\frac{e^{(a+1)\ln x}}{a+1}$, c'est-à-dire $\frac{x^{a+1}}{a+1}$.

PROPRIÉTÉ 3.5 (COMPOSITION) Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J telle que sa dérivée soit continue sur I.
Soient f une fonction continue sur J et F une primitive de f sur J.
La fonction $h : x \longmapsto g'(x)f \circ g(x)$ admet pour primitive sur I la fonction $H : x \longmapsto F \circ g(x) + k$.

DÉMONSTRATION D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée, la fonction H est dérivable sur I, la dérivée H' étant définie par $H'(x) = (F \circ g)'(x) =)g'(x)F' \circ g(x) = h(x)$.

Remarques :

- Si la fonction g est affine, c'est-à-dire $g(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$, on a $g'(x) = a$. La fonction $h : x \longmapsto af(ax + b)$ admet pour primitive la fonction $H : x \longmapsto F(ax + b)$. En utilisant la propriété 3.4, la fonction $\frac{h}{a}$ admet pour primitive la fonction $\frac{H}{a}$, soit $f(ax + b)$ admet pour primitive $\frac{F(ax+b)}{a}$. Par exemple, la fonction $x \longmapsto \cos(ax + b)$ admet pour primitive $\frac{\sin(ax+b)}{a}$.
- En notant u la fonction g et v la fonction F dont la dérivée est $v' = f$, on obtient $u' \times v'(u(x))$ admet pour primitive $v(u(x))$. On reconnait mieux peut-être sous cette forme, les fonctions qui interviennent dans cette propriété.

Le tableau qui suit donne des fonctions u ainsi que la condition sur $u(x)$ pour que les fonctions $f = u' \times v'(u(x))$ admettent pour primitives $v(u(x)) + k$.

$f(x) =$	$F(x) =$	Condition
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} - \{0, -1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$ si $n \leqslant -2$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + k$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$u' \cos u$	$\sin u + k$	$\forall x \in I$
$u' \sin u$	$-\cos u + k$	$\forall x \in I$
$\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u + k$	$\forall x \in I, u(x) \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
$u'e^u$	$e^u + k$	$\forall x \in I$

EXEMPLE 2 – ➲ Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{ax + b}$ avec $a \neq 0$.

En posant $u(x) = ax + b$, u est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $u'(x) = a$ donc $f(x) = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

D'après le tableau ci-dessus $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ a pour primitive $\ln(u) + k$ à condition que $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.

Si $ax + b > 0 \iff x > \frac{-b}{a}$ une primitive de f est donc $F(x) = \dfrac{\ln(ax + b)}{a} + k$.

➲ Soit g la fonction définie par $g(x) = xe^{x^2-1}$.
En posant $u(x) = x^2 - 1$, u est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $u'(x) = 2x$ donc $g(x) = \dfrac{1}{2} \times u'(x)e^u(x)$.
D'après le tableau ci-dessus $u'(x)e^u(x)$ a pour primitive $e^u + k$ sans condition sur $x \in \mathbb{R}$.
Une primitive de g est donc $G(x) = \dfrac{e^{x^2-1}}{2} + k$.

Noter que dans ces exemples, j'ai multiplié la primitive du tableau par un réel ($\frac{1}{a}$ pour F et $\frac{1}{2}$ pour G) sans multiplier la constante k par ce réel. En multipliant la constante k par ce réel, j'aurai trouvé une autre constante ($\frac{k}{a}$ pour F et $\frac{k}{2}$ pour G) que je peux bien renommer k puisqu'elle est quelconque.

➲ Soit h la fonction définie par $h(x) = \sin^2(x)$.
On sait que $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos(2x)}{2}$ (formules de linéarisation).
En posant $u(x) = 2x$, u est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $u'(x) = 2$
Une primitive de $2\cos(2x)$ est $\sin(2x)$ donc une primitive de $\dfrac{\cos(2x)}{2} = \dfrac{1}{4} \times 2\cos(2x)$ est $\dfrac{\sin(2x)}{4}$.
Finalement une primitive de $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos(2x)}{2}$ est $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(2x)}{4} = \dfrac{2x - \sin(2x)}{4}$.

2. Équations différentielles

DÉFINITION 3.2 Une *équation différentielle* est une égalité dans laquelle interviennent une fonction, la ou les dérivées successives de cette fonction. Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble des fonctions qui vérifient cette égalité.

Remarques :

- Déterminer les primitives d'une fonction f c'est résoudre l'équation différentielle $y' = f(x)$. Un autre exemple déjà rencontré d'équation différentielle est la définition de la fonction exponentielle comme l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ telle que $y(0) = 1$. En physique aussi, il est fait un usage fréquent d'équations différentielles, notamment pour caractériser la vitesse et l'accélération d'un solide en mouvement par les équations $v = \frac{dx}{dt}$, soit $v = x'$ (noté $\dot{x}$ par les physiciens) et $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, soit $a = x''$ (noté $\ddot{x}$).
- Si la seule fonction dérivée est utilisée conjointement en combinaison linéaire avec la fonction elle-même, on parle d'*équation différentielle linéaire du 1er ordre* ; si on utilise la dérivée seconde $f'' = (f')'$ (dérivée de la dérivée), on parle d'équation différentielle du 2e ordre ; etc.

2.a. L'équation différentielle *y'=ay*

PROPRIÉTÉ 3.6 L'équation $y' = ay$ admet pour solution les fonctions $f_k : x \longmapsto ke^{ax}$ où k est un réel quelconque. La solution est unique si elle doit satisfaire une condition de type $f_k(x_0) = y_0$.

DÉMONSTRATION Soit f une fonction satisfaisant l'équation différentielle $y' = ay$, on a donc $f'(x) = af(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Posons $g(x) = \frac{f(x)}{e^{ax}}$ et dérivons g : $g'(x) = \frac{f'(x)e^{ax} - f(x)(e^{ax})'}{(e^{ax})^2} = \frac{e^{ax}(f'(x) - af(x))}{(e^{ax})^2} = \frac{f'(x) - af(x)}{e^{ax}}$.
Comme $f'(x) = af(x)$, on en déduit $g'(x) = 0$ et par conséquent $g(x) = k$, une constante réelle.
Finalement $\frac{f(x)}{e^{ax}} = k \iff f(x) = ke^{ax}$.
Si $f_k(x_0) = y_0$ alors $ke^{ax_0} = y_0 \iff k = \frac{y_0}{e^{ax_0}}$. Par conséquent k et f_k sont bien uniques.

EXEMPLE 3 – ➲ Résolvons l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ avec la condition $y(1) = 3$.
$y' - 2y = 0 \iff y' = 2y$ donc les solutions sont les fonctions $f_k(x) = ke^{2x}$.
Comme on souhaite avoir $y(1) = 3$, k doit vérifier l'égalité $ke^{2\times 1} = 3$ soit $k = \frac{3}{e^2}$.
Finalement, la fonction cherchée est $x \longmapsto \frac{3}{e^2}e^{2x} = 3e^{2(x-1)}$.

➲ Pour déterminer l'âge d'un résidus organique on mesure la proportion de Carbone 14 dans le résidus. Sachant qu'étant en vie la proportion était connue et constante et que, par désintégration radioactive, le corps mort perd de cette substance proportionnellement à ce qu'elle en contient à une date t. Autrement dit, la masse $m(t)$ résiduelle au temps t obéit à l'équation différentielle $m' = am$ sachant qu'à l'instant de la mort elle vaut une certaine valeur $m(0) = m_0$.
Les solutions de cette équation sont les fonctions $m_k(t) = ke^{at}$ avec k vérifiant $m_k(0) = k = m_0$.
On a donc une fonction $m(t) = m_0e^{at}$.

La constante a est déterminée par notre connaissance de la désintégration du Carbone 14 qui perd $1,24\%$ de sa masse en un siècle.
On en déduit $m(100) = m_0e^{100a} = \frac{100-1,24}{100}m_0 = 0,9876m_0$
Calculons a : $e^{100a} = 0,9876 \iff 100a = \ln 0,9876 \iff a = \frac{\ln 0,9876}{100} \approx -0,000125$.

Si un corps trouvé aujourd'hui ne contient que 14% de sa masse en Carbone 14 quel est son âge ?
On a approximativement $m(t) = m_0e^{-0,0439t}$ et on a aussi $m(t) = \frac{14}{100}m_0$, on en déduit l'âge t :
$m_0e^{-0,000125t} = \frac{14}{100}m_0 \iff e^{-0,000125t} = 0,14 \iff -0,000125t = \ln 0,14 \iff t = \frac{\ln 0,14}{-0,000125} \approx 15\,757$.
Le corps trouvé aujourd'hui à environ 15 800 ans.

2.b. L'équation différentielle *y'=ay+b*

Propriété 3.7 L'équation $y' = ay + b$ admet pour solution les fonctions $f_k : x \longmapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un réel quelconque. La solution est unique si elle doit satisfaire la condition $f_k(x_0) = y_0$.

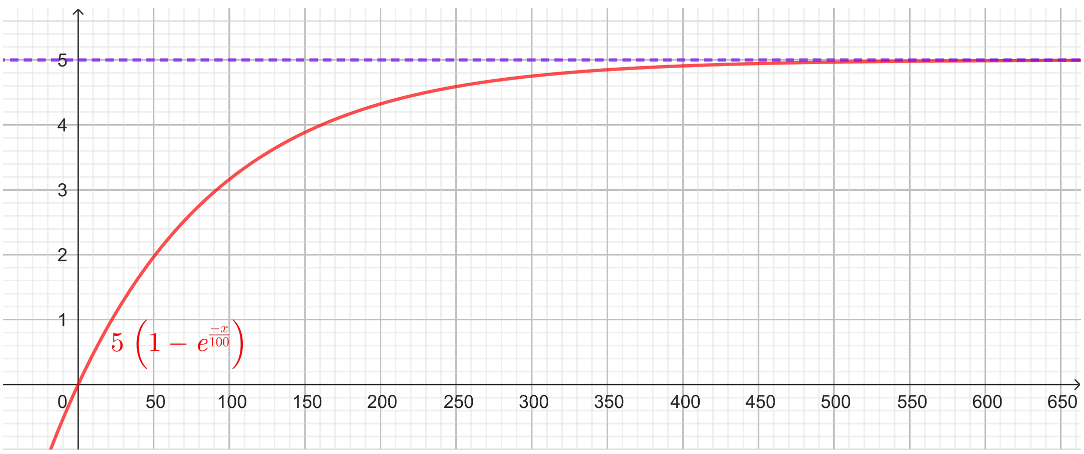
Démonstration Soit f une fonction satisfaisant l'équation différentielle $y' = ay + b$.
On a donc $f'(x) = af(x) + b = a\left(f(x) + \frac{b}{a}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Posons $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$. Ainsi nous avons $f'(x) = ag(x)$ et $g'(x) = f'(x)$.
On en déduit que la fonction g vérifie l'équation différentielle $g'(x) = ag(x)$.
D'après la propriété 3.6 précédente, les solutions s'écrivent $g_k(x) = ke^{ax}$.
Par conséquent $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ avec k réel quelconque.
Bien sûr, dans le cas où $f_k(x_0) = y_0$ on obtient une valeur unique $ke^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0 \iff k = \frac{y_0 + \frac{b}{a}}{e^{ax_0}}$.

Exemple 4 – ➲ Résolvons l'équation différentielle $2y' + y = 1$ avec la condition $y(0) = 0$.
$2y' + y = 1 \iff y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ donc les solutions sont les fonctions $f_k(x) = ke^{-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}} = ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$.
Comme on souhaite avoir $y(0) = 0$, k doit vérifier l'égalité $ke^0 + 1 = 0$ soit $k = -1$.
Finalement, la fonction cherchée est $x \longmapsto 1 - e^{-\frac{x}{2}}$.

➲ Un circuit électrique est constitué d'un générateur de force électromotrice E, d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C. On note $q(t)$ la charge du condensateur (en *farad*) à l'instant t (en secondes) et on sait que $q' + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$.
Déterminons la charge $q(t)$ sachant qu'à l'instant $t = 0$, la charge $q(0)$ est nulle.
La charge du condensateur vérifie une équation différentielle du type $y' = ay + b$ avec $a = \frac{-1}{RC}$ et $b = \frac{E}{R}$, la solution s'écrit donc $q_k(t) = ke^{\frac{-t}{RC}} - \frac{E \times RC}{R \times (-1)} = ke^{\frac{-t}{RC}} + EC$.
Comme $q(0) = 0$, on en déduit $q_k(0) = k + EC = 0 \iff k = -EC$.
La charge du condensateur s'écrit donc $q(t) = EC\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$.

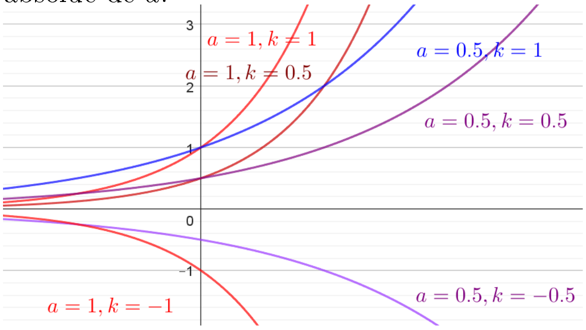
Quelle est la charge maximale q_{MAX} de ce condensateur ?
Il s'agit de la limite de $q(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
On sait que $\lim_{t \to +\infty} e^{\frac{-t}{RC}} = 0$ donc $q_{MAX} = \lim_{t \to +\infty} q(t) = EC$.

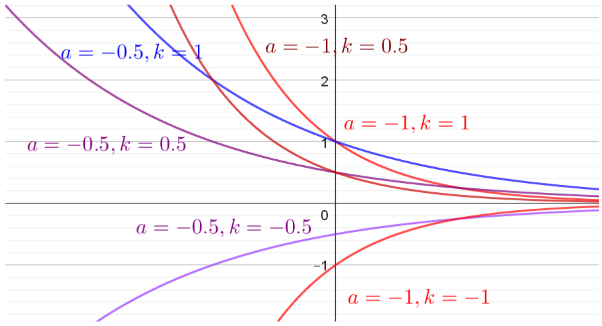
En notant $\tau = RC$, quelle fraction de la capacité maximale est atteinte pour $t = \tau$ et pour $t = 5\tau$?
$q(\tau) = EC\left(1 - e^{\frac{-RC}{RC}}\right) = EC\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0,632EC$, soit environ 63, 2% de q_{MAX}.
$q(5\tau) = EC\left(1 - e^{\frac{-5RC}{RC}}\right) = EC\left(1 - \frac{1}{e^5}\right) \approx 0,993EC$, soit environ 99, 3% de q_{MAX}.
Le graphique ci-dessous représente cette fonction de charge pour $C = 1F$, $R = 100\Omega$ et $E = 5V$.
On a alors $q(t) = 5\left(1 - e^{\frac{-t}{100}}\right)$ et, pour $t = 5\tau = 500s$ soit un peu plus de 8 minutes, on constate que la charge est quasiment au maximum.



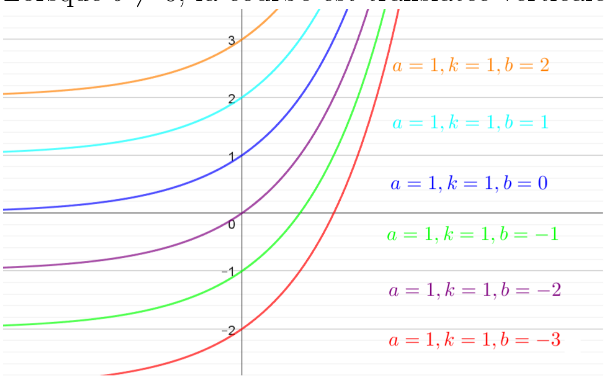
Remarques :

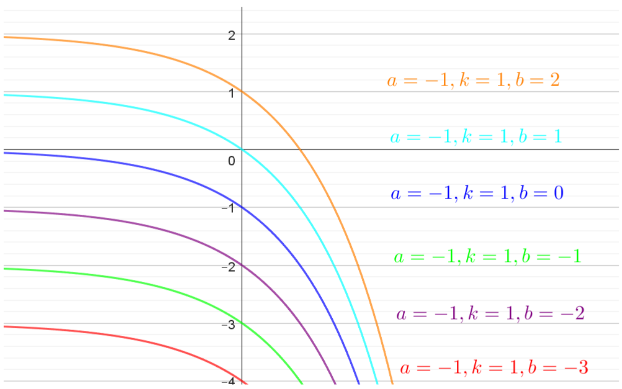
- Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ s'écrivant $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, leurs courbes ont toutes la même allure exponentielle. Lorsque $b = 0$, le signe de k définit le signe de y, le sens de variation est donné par le signe de a et la courbure est donnée par la valeur absolue de a.





Lorsque $b \neq 0$, la courbe est translatée verticalement.





- Pour l'équation différentielle $y' = ay + b$ cherchons une solution particulière constante : la fonction $f : x \longmapsto c$ est une solution si $f'(x) = af(x) + b \iff 0 = ac + b \iff c = \frac{-b}{a}$.
  Un fois cette solution particulière trouvée, une fonction g sera solution si $g'(x) = ag(x) + b$ et, par différence $g'(x) - f'(x) = a\,(g(x) - f(x))$ autrement dit $(g - f)' = a(g - f)$.
  La fonction $h = g - f$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ donc $h(x)$ s'écrit ke^{ax}.
  On en déduit $g(x) - f(x) = ke^{ax}$, or $f(x) = \frac{-b}{a}$ et finalement $g(x) = ke^{ax} + f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.
  Cette méthode, plus générale, peut être utilisée dans un cadre plus large.

2.c. L'équation différentielle *y'=ay+f*

PROPRIÉTÉ 3.8 (MÉTHODE) Soit f une fonction.
L'équation $y' = ay + f$ peut, la plupart du temps, être résolue en deux temps :

1. On cherche une solution particulière g_0, la plus simple possible (constante, affine, etc.)
2. La solution générale g_k est alors telle que $g_k - g_0$ est solution de l'équation $y' = ay$.

Remarques :

- Selon la fonction f, une solution particulière constante n'est pas toujours possible.
  Par exemple l'équation différentielle $2y' - y = x$ n'en admet pas ; la fonction constante $f : x \longmapsto a$ n'est pas solution car $2f'(x) - f(x) = x \iff -a = x$ ce qui est faux.
  La fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$, par contre, est solution si
  $2f'(x) - f(x) = x \iff -2a - b - ax = x \iff (a + 1)x + (b - 2a) = 0$.
  Ce polynôme est nul si et seulement si $a = -1$ et $b = 2a = -2$.
  La fonction $f : x \longmapsto -2x - 1$ est donc une solution particulière de l'équation.
  La solution générale g étant telle que $2g'(x) - g(x) = x$ alors que $2f'(x) - f(x) = x$, il vient par soustraction $2\,(f'(x) - g'(x)) - (f(x) - g(x)) = 0$, soit $(f'(x) - g'(x)) = \frac{1}{2}\,(f(x) - g(x))$.
  La fonction $h = f - g$ est donc solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ dont la solution est $y = ke^{\frac{1}{2}x}$. On en déduit $f(x) - g(x) = ke^{\frac{1}{2}x}$ d'où $g(x) = f(x) - ke^{\frac{1}{2}x} = -2x - 1 - ke^{\frac{1}{2}x}$.

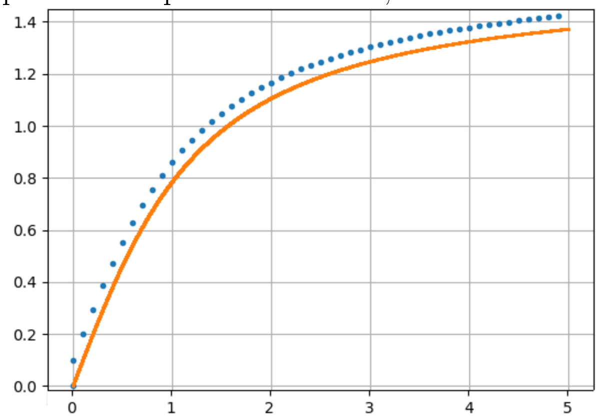
- Euler développa en 1768 une méthode graphique pour construire, point par point, la courbe de la solution F à l'équation différentielle $y' = f$ qui passe par un point donné. Cette méthode est à employer lorsqu'on ne connait pas de primitive à la fonction f.
  Principe de la méthode de Euler : La tangente T à un point d'abscisse x_0 de la courbe représentative de F a pour équation $y = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0)$. Autrement dit, pour tout réel h suffisamment petit on a $F(x_0 + h) \approx F(x_0) + hf(x_0)$. Cette méthode a aussi été utilisée par Euler pour construire des approximations de la courbe de la fonction exponentielle ne sachant que $f' = f$ et $f(0) = 1$ (voir le cours de 1re), l'exemple qui suit la montre dans un autre cas.

Exemple 5 – On cherche à résoudre graphiquement l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, ne connaissant pas de primitive F pour la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, dans le cas particulier où $F(0) = 0$.
Pour être plus précis, on va calculer les coordonnées d'un nuage de points qu'on assimilera à la courbe représentant approximativement la fonction F sur l'intervalle $[0, 5]$.

Pour tout réel $h > 0$ suffisamment petit on a l'approximation $F(x_0 + h) \approx F(x_0) + hf(x_0)$.
Ainsi on va définir une suite de points de coordonnées (x_k, y_k) telle que, les abscisses x_k vérifient la relation de récurrence $x_{k+1} = x_k + h$ (soit $x_k = kh$) et les ordonnées se calculent de proche en proche par la relation $y_{k+1} = y_k = +hf(x_k)$ (on réitère à chaque étape l'approximation, en l'actualisant avec les valeurs du point précédent).
Pour l'intervalle $[0, 5]$, si on veut construire 50 points en plus du point $(0, 0)$ on prend $h = \frac{5-0}{50} = 0,1$.

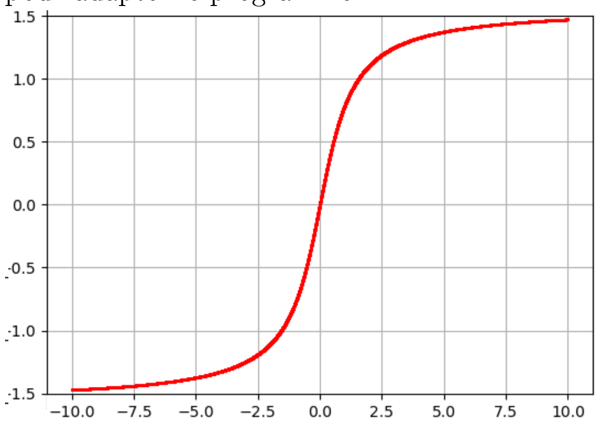
On définit les suites (x_k) et (y_k) par $\begin{cases} x_{k+1} = x_k + 0,1 \text{ avec } x_0 = 0, \text{ soit } x_k = 0,1k \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{1+(x_k)^2} = y_k + \dfrac{0,1}{1+(0,1k)^2} \text{ avec } y_0 = 0 \end{cases}$

Programmons en Python le calcul de ces points et leur affichage (en bleu), l'ensemble des points obtenus étant assimilé à la courbe cherchée.
Pour obtenir une courbe plus proche de la réalité, je vais également afficher (en orange) les 50 000 points correspondants à $h = 0,0001$.




```python
import matplotlib.pyplot as plt

def approx(h,x_max):
    X=[0]
    Y=[0]
    for i in range(int(x_max/h)):
        X.append(i*h)
        Y.append(Y[-1]+h/(1+(i*h)**2))
    return X,Y


X,Y=approx(0.1,5)
plt.plot(X[:],Y[:], linestyle='none', marker='o', markersize=3)

X,Y=approx(0.0001,5)
plt.plot(X[:],Y[:], linestyle='none', marker='o', markersize=1)

plt.grid()
plt.show()
```

Si je veux étendre la courbe à un intervalle plus grand, en incluant des valeurs négatives pour x, mettons qu'on souhaite la visualiser sur l'intervalle $[-10, 10]$, il n'y a que très peu de choses à changer pour adapter le programme :




```python
import matplotlib.pyplot as plt

def approx(h,x_max):
    X=[0]
    Y=[0]
    for i in range(int(x_max/h)):
        X.append(i*h)
        Y.append(Y[-1]+h/(1+(i*h)**2))
    return X,Y

X,Y=approx(0.001,10)
plt.plot(X[:],Y[:], linestyle='none', color = 'red', marker='o', markersize=1)

X,Y=approx(-0.001,-10)
plt.plot(X[:],Y[:], linestyle='none', color = 'red', marker='o', markersize=1)

plt.grid()
plt.show()
```

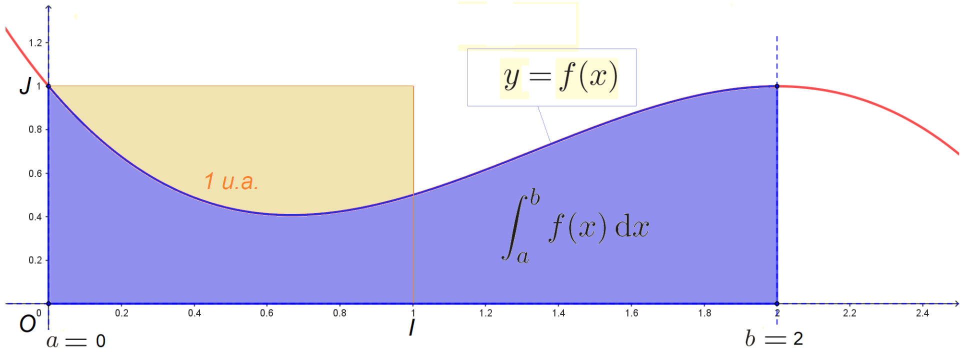
3. Calcul intégral

3.a. Intégrale d'une fonction continue et positive

Dans toute cette partie, on suppose le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\ I,\ J)$ et, f étant une fonction positive définit sur un intervalle $[a, b]$, on s'intéresse à l'aire d'une portion du plan comprise entre 4 courbes :

- Les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, a et $b > a$ étant deux réels quelconques.
- L'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = f(x)$ qui est située au dessus (f positive).

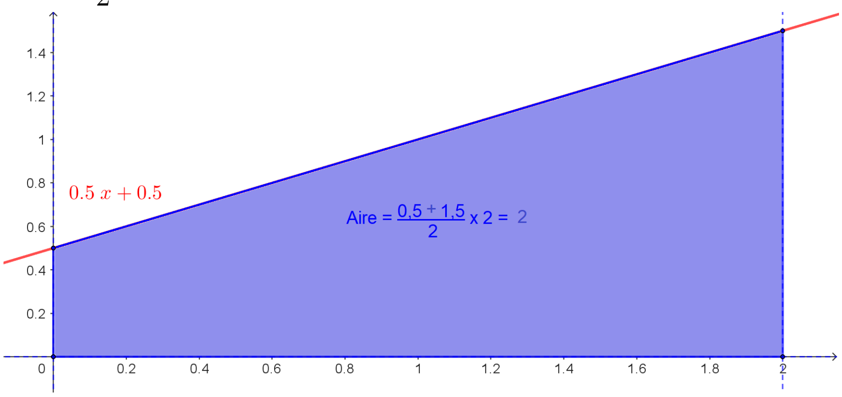
L'unité d'aire (notée *u.a.*) est l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$, soit $\left\|\overrightarrow{OI}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OJ}\right\|$.



Définition 3.3 (Intégrale) Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire (exprimée en *u.a.*) de la partie du plan contenant les points $M(x, y)$ tels que $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$, cette intégrale est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (lire « intégrale de a à b de $f(x)$ dx »).

Remarques :

- D'une façon évidente, pour toute fonction définie en a, on aura $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *u.a.*
  Lorsque la fonction f est une fonction affine, le calcul de l'aire (si $f(a) \geqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$) est aisé car il s'agit alors de l'aire d'un trapèze dont on dispose d'une formule :
  $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(b)}{2} \times (b-a)$. Si $f(x) = 0,5x + 0,5$ alors
  $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(0,5)+f(1,5)}{2} \times (2-0) = 0,5 + 1,5 = 2.$



- L'élément dx ajouté à l'intégrale signifie que la variable pour laquelle on intègre est x.
  Cette précision est nécessaire lorsqu'il y a d'autres variables en jeu dans la définition de $f(x)$.
  On peut comprendre dx comme la base d'un rectangle ($\mathrm{d}x = x_2 - x_1 = h$ lorsque $x_1 = x$ et $x_2 = x + h$) dont la hauteur serait $f(x_1)$ (soit $f(x)$ lorsque $x_1 = x$) ; l'intégrale est alors la valeur limite de la somme des aires de ces rectangles pour x variant de a à b.
  Ce calcul d'aire remontant à Archimède a souvent été étudié dans les classes antérieures.

Propriété 3.9 (Positive Monotone) Soit f une fonction continue, positive et monotone sur un intervalle $[a,b]$. La fonction F définie pour tout x de $[a,b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur $[a,b]$ qui satisfait la condition $F(a)=0$.

Démonstration Supposons f croissante sur $[a,b]$ (raisonnement analogue pour f décroissante).
$\boxed{h>0}$: Encadrons $F(x+h)-F(x)$ pour un x de $[a,b]$ tel que si h assez petit $x+h\in[a,b]$:
$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire sous la courbe de f entre x et $x+h$.
Comme f croit sur cet intervalle d'amplitude h, cette aire est comprise entre $hf(x)$ et $hf(x+h)$ d'où l'encadrement : $hf(x)\leqslant F(x+h)-F(x)\leqslant hf(x+h)$.
En divisant par $h>0$ on obtient $f(x)\leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x+h)$.
Comme f est continue, on a $\lim\limits_{h\to 0^+} f(x+h)=f(x)$.
D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

$\boxed{h<0}$: Faisons de même pour un x de $[a,b]$ tel que si $|h|<0$ assez petit $x+h\in[a,b]$:
$F(x)-F(x+h)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire sous la courbe de f entre $x+h$ et x.
Sur cet intervalle d'amplitude $|h|=-h$, cette aire est comprise entre $-hf(x+h)$ et $-hf(x)$ d'où l'encadrement : $-hf(x+h)\leqslant F(x)-F(x+h)\leqslant -hf(x)$.
En divisant par $-h>0$ on obtient $f(x+h)\leqslant \frac{F(x)-F(x+h)}{-h}\leqslant f(x)$, soit
$f(x+h)\leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x)$.
Comme f est continue, on a $\lim\limits_{h\to 0^-} f(x+h)=f(x)$.
D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

Finalement, pour tout réel x de l'intervalle $[a,b]$, F est dérivable en x et $F'(x)=f(x)$.
Cela prouve que F est une primitive de f sur $[a,b]$.
Comme, de plus, $F(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$, F est la primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule pour $x=a$.

Remarques :

- Dans l'expression $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, les bornes de l'intervalle d'intégration contenant la variable x, il serait ambigu d'utiliser cette variable pour la fonction à intégrer (partie $f(t)\,\mathrm{d}t$ de l'expression). La variable t utilisée alors est une variable *muette* qui peut être remplacée par n'importe quelle lettre, du moment qu'il n'y ait pas d'ambigüité. C'est exactement comme lorsqu'on écrit, par exemple, la somme des n premiers carrés $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.
- Dans l'hypothèse d'une fonction qui est continue et positive mais pas monotone, cette propriété reste valable. L'intervalle $[a,b]$ est alors découpé en petits intervalles sur lesquels la fonction est monotone et la relation de Chasles (voir plus loin) permet la généralisation.
- Pour $f(x)=0,5x+0,5$ les primitives de f sur $[0,2]$ s'écrivent $0,25x^2+0,5x+c$, celle qui s'annule en 0 a pour coefficient $c=0$. D'après la propriété, on en déduit
  $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0,25x^2+0,5x$ et, en particulier,
  $F(2)=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=0,25\times 2^2+0,5\times 2=1+1=2$ ce qui avait été obtenu précédemment.

Propriété 3.10 (Calcul (1)) Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$. Si la fonction F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

DÉMONSTRATION Pour $x \in [a,b]$, la fonction $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.
Les primitives F_k de f sur $[a,b]$ s'écrivent donc $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + k$ avec k réel quelconque.
On en déduit que $F_k(b) - F_k(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + k - \left(\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + k\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
Mais comme $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on en déduit que $F_k(b) - F_k(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et comme le réel k disparait, on peut utiliser n'importe quelle primitive F de f et ainsi $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3.b. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

PROPRIÉTÉ 3.11 (CONTINUE) Soit $I = [a,b]$ un intervalle.
Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

DÉMONSTRATION Comme f est continue elle admet un minimum sur $[a,b]$, notons-le m.
Autrement dit $\forall x \in [a,b], f(x) \geqslant m \iff f(x) - m \geqslant 0$.
En posant $g(x) = f(x) - m$, la fonction g est continue et positive.
Elle admet donc la primitive $G_a(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.
La fonction F définie par $F(x) = G_a(x) + mx$ est une primitive de f sur $[a,b]$ car
$F'(x) = G'_a(x) + (mx)' = g(x) + m = f(x)$.

PROPRIÉTÉ 3.12 (CALCUL (2)) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.
Si la fonction F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

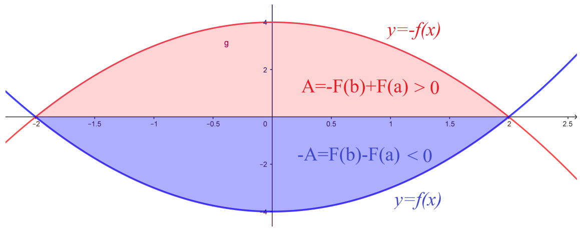
Remarques :

- Dans les deux dernières propriétés on a utilisé la notation $[F(x)]_a^b$ pour désigner $F(b) - F(a)$. Cette notation est courante car elle permet d'introduire la primitive de f utilisée pour le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
  Par exemple on écrira $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - (-e^{-0}) = 1 - \frac{1}{e}$.
- On remarque ici que le calcul de l'intégrale est inchangé : du moment que l'on connait une primitive de f sur $[a,b]$ – peu importe la constante additive k (on prendra $k = 0$) – quelque soit le signe de f, on peut calculer l'intégrale de f entre a et b. Ce qui change, c'est que si il y a des parties où la fonction est négative, cette intégrale ne représente plus l'aire comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses. Par exemple $\displaystyle\int_0^\pi \cos(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(x)]_0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 0$ (les deux parties de l'aire s'annulent, celle en-dessous de l'axe étant comptée négativement).

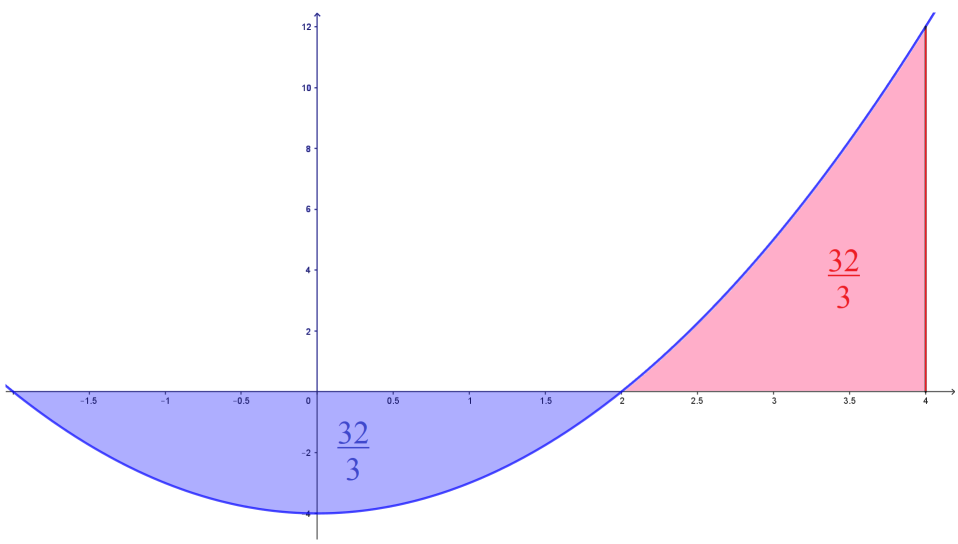
PROPRIÉTÉ 3.13 (AIRE) Soit f une fonction continue et *négative* sur un intervalle $[a,b]$.
L'intégrale de a à b de la fonction f est l'*opposée* de l'aire (exprimée en *u.a.*) de la partie du plan contenant les points $M(x,y)$ tels que $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ f(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}$,

DÉMONSTRATION Rappelons-le, le plan étant muni du repère orthogonal $(O,\, I,\, J)$, les aires mesurées en *u.a.* (aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$) sont des grandeurs positives.
La fonction f étant continue admet une primitive notée F et, d'après la propriété 3.4 de linéarité des primitives, la fonction $-f$ admet pour primitive la fonction $-F$.
Ainsi $\int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}t = [-F(x)]_a^b = -(F(b)-F(a)) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Or, f étant négative sur $[a,b]$, $-f$ est positive. L'intégrale entre a et b de $-f$ est l'aire sous la courbe de $-f$ qui, par symétrie par rapport à l'axe des abscisses est égale à l'aire au-dessus de la courbe de f. Celle-ci est donc l'opposée de l'intégrale entre a et b de f.

EXEMPLE 6 – Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4$
La fonction f est négative sur l'intervalle $[-2, 2]$.
$\int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} = \frac{2^3}{3} - 4\times 2 - \frac{(-2)^3}{3} + 4\times(-2) = \frac{16}{3} - 16 - = -\frac{32}{3} \approx -10{,}7.$
Cette intégrale est négative car la fonction est négative ; sa valeur absolue est égale à l'aire comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses.



Pour quelle valeur de $x > 0$ a t-on $\int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$?
Autrement dit, pour quelle valeur de $x > 0$ a t-on $\int_{2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{32}{3}$?
Il faut résoudre l'équation $\int_{2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{32}{3} \iff \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^x = \frac{32}{3} \iff \frac{x^3}{3} - 4x - \frac{2^3}{3} + 4\times 2 = \frac{32}{3}$
Cette équation est du 3$^{\text{e}}$ degré $\frac{x^3}{3} - 4x + \frac{-8-32+24}{3} = 0 \iff x^3 - 12x - 16 = 0 \iff x = -2$ ou $x = 4$.
Ainsi, on a $\int_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ (on passage, on obtient également $\int_{2}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$).
L'aire en-dessous de la courbe de f entre 2 et 4 égale l'aire au-dessus de la courbe de f entre -2 et 2.
Entre -2 et 4, l'aire comprise entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe (Ox) est $-\int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{64}{3}$.

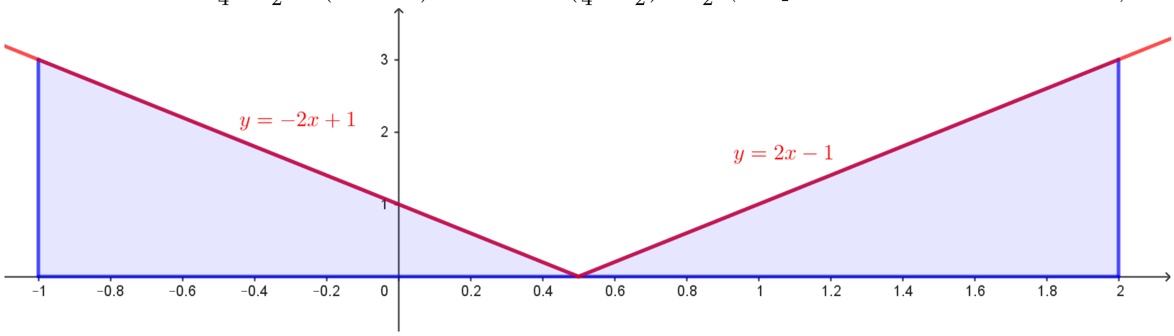


3.c. Propriétés algébriques

Propriété 3.14 (Relation de Chasles) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.
Pour tout réel $c \in [a, b]$ on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarques :

- Cette propriété se justifie à l'aide de la propriété 3.12 car :
  — $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
  — $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$.
- On peut généraliser le calcul intégral sur un intervalle I où la fonction f est continue : si deux nombres a et b appartiennent à I (sans avoir nécessairement $a < b$) : $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
  En effet, la relation Chasles sera satisfaite si on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- Avec cette propriété, les fonctions définies par morceaux sont facilement intégrables.
  Par exemple $f : x \longmapsto |2x-1|$ est définie par $\begin{cases} f(x) = -2x+1 \text{ pour } x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ f(x) = 2x-1 \text{ pour } x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$
  Par conséquent $\displaystyle I = \int_{-1}^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} -2t+1\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^2 2t-1\,\mathrm{d}t = \left[-x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^2$
  On obtient $I = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - (-1-1) + 4 - 2 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{9}{2}$ (ce qui est facilement vérifiable)



Propriété 3.15 (Linéarité) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$.

- $\displaystyle\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- $\displaystyle\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

D'une façon générale, $\displaystyle\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration Ces propriétés découlent de la propriété 3.4 : si F et G sont des primitives de f et g alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ et, pour tout réel λ, λF est une primitive de λf.
Il ne reste plus qu'à appliquer la propriété 3.12 et les propriétés de l'addition et de la multiplication :
$\displaystyle\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = [F(x) + G(x)]_a^b = [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = [\lambda F(x)]_a^b = \lambda\,[F(x)]_a^b = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple 7 – Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.
On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ mais on ne connait pas de primitive de f.
On écrit alors $f(x)=\dfrac{x^3+x-x}{1+x^2}=\dfrac{x^3+x}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{x(x^2+1)}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}=x-\dfrac{x}{1+x^2}$.
On remarque que $-\dfrac{x}{1+x^2}$ est de la forme $\dfrac{-1}{2}\dfrac{u'}{u}$ avec $u=x^2+1$ et $u'=2x$
Comme u est positive sur $[0,1]$, on sait que $\dfrac{-1}{2}\ln u$ est une primitive de $\dfrac{-1}{2}\dfrac{u'}{u}$.
On peut donc calculer notre intégrale :
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{-\ln(1+x^2)}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 1}{2}=\frac{1-\ln 2}{2}\approx 0,1534264$$

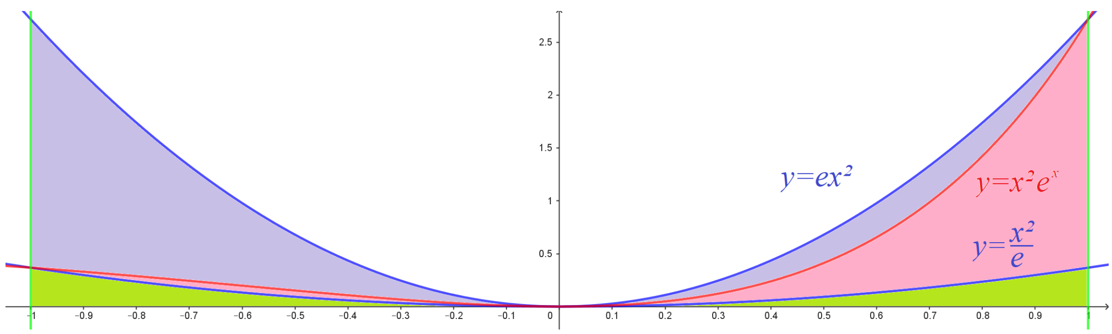
Propriété 3.16 (Inégalités) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$.
- $\forall x\in[a,b], f(x)\geqslant 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$
- $\forall x\in[a,b], f(x)\leqslant 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 0$
- $\forall x\in[a,b], f(x)\geqslant g(x) \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration ➲ La 1re proposition est justifiée par la définition 3.3.
Si l'on part de la propriété 3.9 caractéristique de l'intégrale, la fonction F définie pour tout x de $[a,b]$ par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable : $F'(x)=f(x)$ et $f(x)\geqslant 0\Longrightarrow F'(x)\geqslant 0$.
F est croissante donc $x\geqslant a\Longrightarrow F(x)\geqslant F(a)=0$ d'où $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)\geqslant 0$.

➲ La 2e proposition repose sur le même type d'argument : $f(x)\leqslant 0\Longrightarrow F'(x)\leqslant 0$. La fonction F est décroissante et donc $F(x)\leqslant 0$, soit $\forall x\in[a,b]$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)\leqslant 0$ d'où $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)\leqslant 0$.

➲ 3e proposition : en posant $h(x)=f(x)-g(x)$, on a
$f(x)\geqslant g(x)\Longleftrightarrow f(x)-g(x)\geqslant 0\Longleftrightarrow h(x)\geqslant 0$ et on est alors ramené à la 1re proposition :
$\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0\Longleftrightarrow\int_a^b f(t)-g(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$ et la propriété 3.15 de linéarité permet de conclure.

Exemple 8 – Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=x^2e^x$.
On ne connait pas de primitive de f aussi on souhaite encadrer $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
On sait que, pour $-1\leqslant x\leqslant 1$ on a $e^{-1}\leqslant e^x\leqslant e^1\Longleftrightarrow \frac{1}{e}\leqslant e^x\leqslant e$.
En multipliant par $x^2\geqslant 0$ on obtient l'encadrement $\frac{x^2}{e}\leqslant f(x)\leqslant ex^2$.
On en déduit que $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{t^2}{e}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{-1}^1 et^2\,\mathrm{d}t\Longleftrightarrow\left[\frac{t^3}{3e}\right]_{-1}^1\leqslant\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\left[\frac{et^3}{3}\right]_{-1}^1$.
On en déduit $\frac{2}{3e}\leqslant\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{2e}{3}$, soit approximativement $0,3\leqslant\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 1,8$.



3.d. Intégration par parties

PROPRIÉTÉ 3.17 Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b]$, telles f' et g' soient continues sur $[a,b]$. On a $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$

DÉMONSTRATION On sait que, par produit de fonctions dérivables, la fonction fg est dérivable sur $[a,b]$ et $(fg)' = f'g + fg'$. Par conséquent $\forall x \in [a,b], f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'g(x)$.
Par somme et produit de fonctions continues, les expressions dans chacun des membres de cette égalité sont continues. Elles admettent donc des primitives et sont intégrables. Par unicité de l'intégrale, les intégrales sur $[a,b]$ des deux membres sont donc égales :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \Big[(f(t)g(t))' - f'(t)g(t)\Big]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b (f(t)g(t))'\,\mathrm{d}t - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

EXEMPLE 9 – Reprenons la fonction de l'exercice 8 et calculons cette fois $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t$.
L'intégration par parties se fait ici en deux étapes successives :
$\boxed{\text{Étape 1}}$ Posons $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x^2$.
La fonction $u : x \longmapsto e^x$ est dérivable, sa dérivée $u'(x) = e^x$ continue sur $[-1,1] \subset \mathbb{R}$.
La fonction $v : x \longmapsto x^2$ est dérivable, sa dérivée $v'(x) = 2x$ continue sur $[-1,1] \subset \mathbb{R}$.
On a $\displaystyle\int_{-1}^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t = \left[t^2e^t\right]_{-1}^1 - 2\int_{-1}^1 te^t\,\mathrm{d}t$.
$\boxed{\text{Étape 2}}$ Posons $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$.
Les fonctions u et v définies par $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$ sont dérivables et leurs dérivées u' et v' définies par $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$ sont continues sur $[-1,1] \subset \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t &= \left[t^2e^t\right]_{-1}^1 - 2\left[\left[te^t\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^t\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \left[t^2e^t\right]_{-1}^1 - 2\left[\left[te^t\right]_{-1}^1 - \left[e^t\right]_{-1}^1\right]\\ &= e - \frac{1}{e} - 2\left[\left(e+\frac{1}{e}\right) - \left(e - \frac{1}{e}\right)\right]\\ &= e - \frac{1}{e} \approx 0,87888\end{aligned}$$

Remarques :

- L'intégration par partie est utile lorsqu'on ne dispose pas de primitive de la fonction à intégrer comme c'est le cas dans notre exemple et d'une façon générale lorsque cette fonction à intégrer est le produit d'un polynôme (facile à dériver) par une fonction dont on connait une primitive.
- À l'inverse on peut utiliser la primitive du polynôme et dériver la fonction qui constitue l'autre facteur. Par exemple, pour déterminer une primitive de la fonction ln,
  on calcule $I(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$ en posant $v(t) = \ln t$ et $u'(t) = 1$, on a $v'(t) = \frac{1}{t}$ et $u(t) = x$.
  On a ainsi $I(x) = [t\ln t]_1^x - \displaystyle\int_1^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln x - 0 - [t]_1^x = x\ln x - x - 1$.
  Cette fonction $I(x)$ est une primitive de $\ln x$.
  Généralement on lui préfère celle qui n'a pas de constante $x\ln x - x$.
- On retiendra que si deux fonctions sont égales sur un intervalle leurs intégrales sur le même intervalle le sont aussi (la réciproque de cette propriété est généralement fausse).

3.e. Calculs de grandeurs

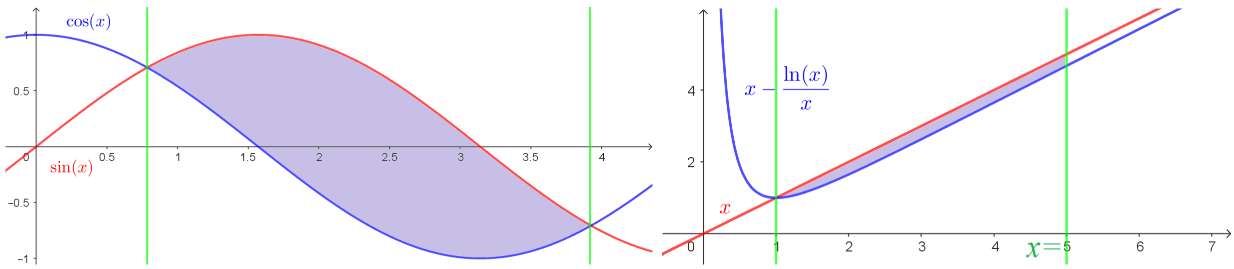
Propriété 3.18 (Calcul d'aire) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ où $\forall x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)$. L'aire (exprimée en *u.a.*) de la partie du plan contenant les points $M(x,y)$ tels que $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{cases}$ est $\displaystyle\int_a^b g(t) - f(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration ➲ Dans le cas où les deux fonctions sont positives, d'après la définition 3.3 :
Comme $\forall x \in [a,b], f(x) \geqslant 0$, $A_f = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe (Ox) pour $a \leqslant x \leqslant b$.
Comme $\forall x \in [a,b], g(x) \geqslant 0$, $A_g = \displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe (Ox) pour $a \leqslant x \leqslant b$.
Par soustraction de ces grandeurs, $A_g - A_f$ est l'aire entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ pour $a \leqslant x \leqslant b$.
La linéarité de l'intégration permet de conclure $\left(\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t) - f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

➲ Dans le cas général, comme f et g sont définies sur $[a,b]$ et comme $\forall x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)$, il existe un minimum m tel que $\forall x \in [a,b], m \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
Les fonctions $f-m$ et $g-m$ sont donc toutes les deux continues et positives sur $[a,b]$, d'après ce qui précède l'aire entre les courbes $\mathscr{C}_{g-m}$ et $\mathscr{C}_{f-m}$ est $\displaystyle\int_a^b g(t) - m - (f(t) - m)\ \mathrm{d}t = \int_a^b g(t) - f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 10 – Calculons l'aire entre les courbes des fonctions sin et cos pour $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.
J'ai choisi ces bornes qui sont deux solutions successives de l'équation $\sin(x) = \cos(x)$ pour m'assurer que sur tout l'intervalle une des fonctions est supérieure à l'autre, ici on a $\sin(x) \geqslant \cos(x)$. L'aire colorée à gauche sur le graphique ci-dessous est égale à :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(x) - \cos(x)\,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(x)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(x)\,\mathrm{d}t \\ &= [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} - [\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= -\cos(\frac{5\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{5\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

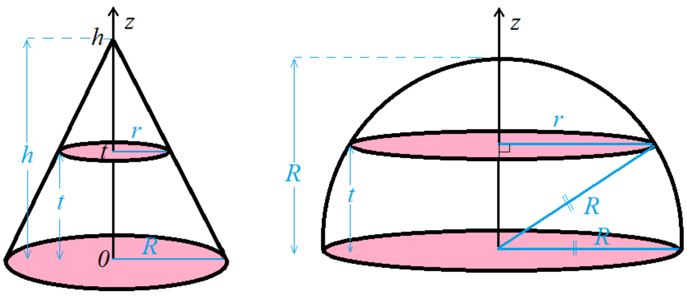


Calculons l'aire entre la courbe de la fonction $f : x \longmapsto x - \frac{\ln x}{x}$ et la droite d'équation $y = x$ pour $x \geqslant 1$. J'ai choisi cette borne inférieure car pour $x = 1$ on a $x - f(x) = \frac{\ln x}{x} = 0$.
Pour $x \geqslant 1$, on a $x - f(x) = \frac{\ln x}{x} \geqslant 0$ et a pour limite 0 : la droite est asymptote à $\mathscr{C}_f$.
J'en déduis que $A(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ est l'aire colorée à droite sur le graphique ci-dessus.
Intégrons par parties en posant $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = \ln t$; on a alors $u'(t) = \ln t$ et $v(t) = \frac{1}{t}$.
$\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln^2(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$. On remarque alors que $2A(x) = \left[\ln^2(t)\right]_1^x \iff A(x) = \frac{\ln^2(x)}{2}$.
On a $A(5) = \frac{\ln^2(5)}{2} \approx 1{,}295$ et $A(5000) = \frac{\ln^2(5000)}{2} \approx 36{,}27$ mais $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$.

Propriété 3.19 (Calcul de volume) L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O,\, I,\, J,\, K)$.
L'unité de volume (notée *u.v.*) est le volume d'un cube de côtés $[OI]$.
On considère la portion d'un solide délimité par les plans parallèles d'équations $z = a$ et $z = b$ avec $a \leqslant b$ et on note $\mathscr{S}(t)$ l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = t$.
Si $\mathscr{S}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ alors le volume de cette portion de solide est $\displaystyle\int_a^b \mathscr{S}(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 11 – Calculons le volume d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon R en choisissant un repère orthonormal $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ avec O au centre de la base et le vecteur $\vec{k}$ orthogonal au plan de la base. Si on coupe ce cône selon un plan parallèle à la base de côte $z = t$, la section de ce cône est un disque d'aire πr^2 où r est le rayon de cette section.
Le théorème de Thalès nous permet d'exprimer r en fonction de R, h et t :
$\dfrac{r}{R} = \dfrac{h-t}{h} \iff r = R \times \dfrac{h-t}{h}$. L'aire de la section est donc $\pi\left(R \times \dfrac{h-t}{h}\right)^2 = \dfrac{\pi R^2 (h-t)^2}{h^2}$.
Le volume du cône est donc $\mathscr{V}(h) = \displaystyle\int_0^h \frac{\pi R^2 (h-t)^2}{h^2}\,\mathrm{d}t$.
Pour ce calcul on aura besoin d'une primitive de $(h-x)^2$:
$(h-x)^2$ est de la forme $-u'u^2$ avec $u(x) = h - x$ et $u'(x) = -1$, sa primitive est $\dfrac{u^3}{3}$, soit $\dfrac{-(h-x)^3}{3}$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}(h) = &= \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h (h-t)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi R^2}{h^2} \left[\frac{-(h-t)^3}{3}\right]_0^h \\
&= \frac{\pi R^2}{h^2} \left[0 + \frac{h^3}{3}\right] = \frac{\pi R^2 h^3}{3h^2} = \frac{\pi R^2 h}{3}
\end{aligned}$$



Calculons le volume d'une sphère de rayon R en doublant le volume d'une demi-sphère.
On choisit un repère orthonormal $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ avec O au centre de la sphère et on coupe cette sphère par un plan de côte $z = t$, la section de cette sphère est un disque d'aire πr^2 où r en est le rayon.
Le théorème de Pythagore nous permet d'exprimer r en fonction de R et t :
$R^2 = t^2 + r^2 \iff r^2 = R^2 - t^2 \implies r = \sqrt{R^2 - t^2}$. L'aire de la section est $\pi\left(\sqrt{R^2 - t^2}\right)^2 = \pi(R^2 - t^2)$.
Le volume du cône est donc $\mathscr{V}(R) = 2\displaystyle\int_0^R \pi(R^2 - t^2)\,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}(R) &= 2\left(\int_0^R \pi R^2\,\mathrm{d}t - \int_0^R \pi t^2\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 2\left(\left[\pi R^2 t\right]_0^R - \left[\pi \frac{t^3}{3}\right]_0^R\right) \\
&= \pi R^3 - \pi \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on retrouve bien les formules rencontrées, sans justification, au collège.

Définition 3.4 (Valeur moyenne) La valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a, b]$ est le nombre réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarques :

- Si f est positive, sa valeur moyenne sur $[a, b]$ est l'aire du rectangle de côtés $b - a$ et μ car, par définition de l'intégrale d'une fonction positive, cette aire mesure $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mu(b-a)$.
- En cinématique (étude du mouvement), la distance parcourue par un solide entre les instants t_1 et t_2 animé d'une vitesse instantanée $v(t)$ est donnée par $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.
  Si $v(t) = t^2 + 5t$ (t en s et v en $m^{-1}.s$) alors la distance parcourue en deux minutes ($120s$) est $\displaystyle\int_0^{120} t^2 + 5t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2}\right]_0^{120} = \frac{120^3}{3} + \frac{5\times 120^2}{2} = 612\,000\ m$ soit $612\ km$ (la vitesse atteinte au bout de 2 min est égale à $54\,000\ km^{-1}.h$).
  La vitesse moyenne sur ce parcourt est $\bar{v} = \frac{612\,000}{120} = 5100\ m^{-1}.s$, soit $18\,360\ km^{-1}.h$.

Propriété 3.20 (Existence) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit μ, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$. Il existe au moins un réel c de $[a, b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Démonstration Cette propriété découle du théorème des valeurs intermédiaires :
La fonction f étant continue sur $[a, b]$ elle admet un minimum m et un maximum M et, pour tout $x \in [a, b]$, on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$. En intégrant cet encadrement entre a et b, on obtient
$\displaystyle\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}t$, soit $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$ et,
en divisant par $b - a > 0$, il vient $m \leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M \Longleftrightarrow m \leqslant \mu \leqslant M$.
La fonction f étant continue et l'image de l'intervalle $[a, b]$ étant $[m, M]$, le TVI implique qu'il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Remarques :

- L'encadrement obtenu $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$ est valable à la seule condition que f soit continue. Si de plus f est positive, il montre que l'aire sous la courbe de f est compris entre l'aire des rectangles de longueur $b - a$ et de hauteur m et M.
- Si la fonction est strictement monotone sur $[a, b]$ le réel c tel que $f(c) = \mu$ est unique, la fonction f réalisant alors une bijection de $[a, b]$ vers $[f(a), f(b)]$ si f est croissante, vers $[f(b), f(a)]$ sinon.
  Dans notre exemple en cinématique ci-dessus, la fonction v est strictement croissante donc il existe un moment de l'intervalle $[0, 120]$ où la vitesse atteinte est égale à la vitesse moyenne $\bar{v} = 2040\ m^{-1}.s$. Pour le trouver, résolvons l'équation $v(t) = 5100 \Longleftrightarrow t^2 + 5t - 5100 = 0$.
  On trouve $t = \frac{5\sqrt{817}-5}{2} \approx 68,958\ m$; vérifions cela sur un graphique :