2 Fonctions (1)

Plan du chapitre :

2.1 Rappels sur les limites

2.2 Continuité, TVI, bijection et réciproque

2.3 Dérivabilité, fonction dérivée, théorèmes de la dérivation

2.4 Théorème de Rolle, TAF, sens de variation et extremums, étude de la convexité

2.5 La fonction ln (logarithme népérien), les fonctions logarithmes et exponentielles de base a

Aperçu historique : La notion de limite s'est précisée lentement, au cours des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, pour trouver une définition précise au début du XIX^{e} avec les mathématiciens Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Bernard Bolzano (1781-1848) et surtout Karl Weierstrass (1815-1897), « le père de l'analyse moderne », qui définit également la notion de continuité.

Jusqu'à Bolzano et Weierstrass, la notion de continuité était intuitive : on considérait des courbes tracées sans lever le crayon, et le théorème des valeurs intermédiaires était perçu comme une évidence géométrique. Pourtant ces notions sont fondamentales et il convient de les aborder avec rigueur. L'étude des limites en un point est l'outil qui permit cette conceptualisation. Si une fonction est continue sur un intervalle, sa monotonie en fait une bijection, ce qui a pour conséquence qu'on peut en définir la réciproque ; cette propriété a notamment permis de définir la fonction ln (les initiales de *logarithme népérien*) comme réciproque de la fonction continue et strictement croissante exp.

La notion de dérivée a aussi émergé de façon intuitive avec les travaux sur l'*infiniment petit* de Newton et Leibniz au XVII^{e} siècle. Elle s'est ensuite précisée avec Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) qui fait le lien avec le taux d'accroissement, et c'est encore Weierstrass qui finalise les définitions dans des termes encore utilisés aujourd'hui.

L'autre notion fondamentale de l'analyse, l'intégration – notion que nous étudierons au chapitre suivant – a des racines anciennes puisque, notamment, les travaux d'Archimède sur le calcul de l'aire d'un disque la préfigure. Le calcul infinitésimal de Newton et Leibniz va relier le calcul différentiel et le calcul intégral mais c'est Bernhard Riemann (1826-1856) qui va, au XIX^{e} siècle, exposer la théorie de l'intégrale utilisée aujourd'hui.
Les fonctions logarithmes furent inventées au début du XVII^{e} siècle par le mathématicien astronome écossais John Napier (1550-1617). Logarithmes vient du grec *logos*(relation) et *arithmeticos*(nombre) Napier publie avec Henry Gibbs (1561-1631) des tables de correspondances entre deux séries de valeurs possédant la propriété de faire correspondre un produit à une somme, dans le but de simplifier les calculs astronomiques. Les tables trigonométriques existaient depuis plusieurs siècles, mais la relation fondamentale $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$ permet de remplacer une multiplication par une addition. Ces tables furent utilisées jusqu'au début de l'ère informatique.
Les fonctions exponentielles et logarithmes deviennent rapidement des incontournables des problèmes liés au « nouveau calcul »

1. Limite d'une fonction

1.a. Au voisinage de l'infini

DÉFINITION 2.1 ($+\infty$) Une fonction f, définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, ce que l'on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si, quelque soit le nombre A, à partir d'une certaine valeur $x_0 > a$ on a $x > x_0 \Longrightarrow f(x) > A$.
Autrement dit : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x > x_0, f(x) > A$

Remarques : On a une définition analogue pour les fonctions de limite $-\infty$ en $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x > x_0, f(x) < A$
De même, on définit ce que signifie, pour une fonction numérique, avoir une limite $\pm\infty$ en $-\infty$:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x < x_0, f(x) > A$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x < x_0, f(x) < A$
On dit « f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ » ou bien « f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ».

PROPRIÉTÉ 2.1 Chacune des fonctions suivantes a pour limite $+\infty$ en $+\infty$:
$x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, etc. (soit $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \sqrt{x}$

DÉMONSTRATION ➠ Montrons cela pour la fonction $x \mapsto x^2$.
Pour tout nombre $A > 0$ on peut trouver x_0 à partir duquel tous les carrés sont plus grands que A : il s'agit de $x_0 = \sqrt{A}$ car, pour $x > 0$, $x^2 > A \Longleftrightarrow x > \sqrt{A}$.

➠ Pour les autres valeurs de l'exposant $n \geqslant 1$: comme $x^n > x^{n-1}$ pour tout $x \geqslant 1$ (en multipliant par $x^{n-1} > 0$), $x > \sqrt{A} \Longrightarrow x^n > x^2 > A$ et donc, x^n dépasse n'importe quelle valeur A arbitrairement choisie pourvu que x soit assez grand.

➠ Pour la fonction racine, la valeur x_0 à partir de laquelle $\sqrt{x}$ dépasse n'importe quelle valeur A arbitrairement choisie, est $x_0 = A^2$.
Les fonctions puissances et la fonction racine tendent donc toutes vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

DÉFINITION 2.2 (FONCTION DE LIMITE FINIE) Une fonction f à valeurs positives sur $[a;+\infty[$, admet 0 comme limite en $+\infty$ si et seulement si, quel que soit le nombre $\epsilon > 0$, à partir d'une certaine valeur x_0 de x, on a $f(x) < \epsilon$.
Autrement dit : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists x_0 > a,\ \forall x > x_0, f(x) < \epsilon$
l étant un réel, une fonction f admet l comme limite en $+\infty$ si la fonction $f - l$ admet pour limite 0 en $+\infty$. Autrement dit, s'il existe une fonction φ de limite 0 en $+\infty$, telle que $f(x) = l + \varphi(x)$.

Remarques :
- De la première partie, on tire une définition de la limite 0 en $+\infty$ pour une fonction de signe quelconque : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} |f(x)| = 0$. On peut exprimer cela explicitement :
  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists x_0 > a,\ \forall x > x_0, f(x) \in]-\epsilon, +\epsilon[$.
  Pour une limite finie quelconque :
  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists x_0 > a,\ \forall x > x_0, f(x) \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$
  ce qu'on peut noter aussi $|f(x) - l| < \epsilon$.
- Notons que toutes les fonctions n'ont pas forcément une limite en $+\infty$:
  $x \mapsto \sin(x)$ par exemple n'a pas de limite.

PROPRIÉTÉ 2.2 Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0 en $+\infty$:
$x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, etc. (soit $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

DÉMONSTRATION ➠ Montrons cela pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Pour tout nombre $\epsilon > 0$ on peut trouver x_0 à partir duquel toutes les inverses sont plus petites que ϵ : il s'agit de $x_0 = \frac{1}{\epsilon}$ car, pour $x > 0$, $\frac{1}{x} < \epsilon \Longleftrightarrow x > \frac{1}{\epsilon}$.

➠ Pour les autres valeurs de l'exposant $n > 0$, il suffit de remarquer encore que, comme $x^n > x^{n-1}$ pour tout $x \geqslant 1$, on déduit $\frac{1}{x^n} < \frac{1}{x^{n-1}} < \cdots < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$ et donc $\forall n > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

➠ Pour la fonction racine, la valeur x_0 à partir de laquelle $\frac{1}{\sqrt{x}}$ devient inférieur à n'importe quelle valeur ϵ arbitrairement choisie, est $x_0 = \frac{1}{\epsilon^2}$.

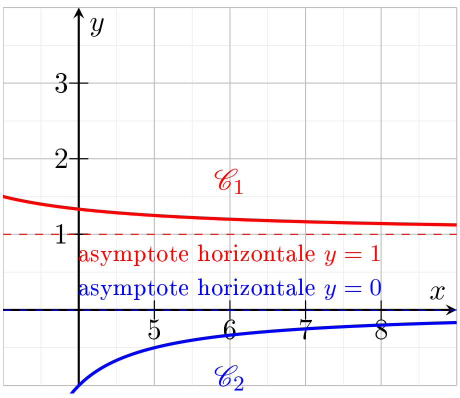
Limite en $+\infty$:

- D'une façon générale tout ce qui a été énoncé concernant la limite en $+\infty$ est transposable au voisinage de $-\infty$. Des limites énoncées dans la propriété 2.1, on déduit notamment :
  - comme la fonction carré est paire, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
  - comme la fonction cube est impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- On peut étendre la propriété $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ aux fonctions $x \mapsto \frac{1}{(x+\alpha)^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et α un réel quelconque. En effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+\alpha)^n} = 0$ car $\forall \epsilon > 0$, pour avoir $|\frac{1}{(x+\alpha)^n}| < \epsilon$ il suffit de prendre $|(x+\alpha)^n| > \frac{1}{\epsilon}$ soit $x > \sqrt[n]{\frac{1}{\epsilon}} - \alpha$.

Exemples et interprétations graphiques : Si une fonction f a une limite finie l en $+\infty$, la courbe de f se rapproche de plus en plus de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = l$. Cette droite est appelée « asymptote horizontale » pour la courbe $\mathscr{C}_f$. On dit que la courbe tend asymptotiquement vers la droite : elle s'en rapproche sans jamais être confondue avec elle.

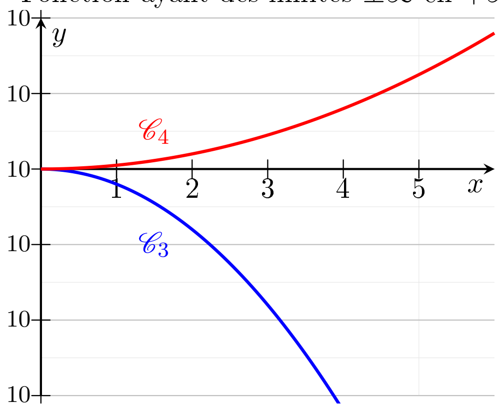
- La fonction g_1 définie par $g_1(x) = \frac{x}{x-1}$ a pour limite $l = 1$ en $+\infty$, car $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$. Cette fonction s'écrit $g_1(x) = 1 + \varphi(x)$ où $\varphi(x) = \frac{1}{x-1}$ est une fonction de limite nulle en $+\infty$ (notre remarque précédente justifie cela). La courbe de g_1 tend asymptotiquement vers la droite d'équation $y = 1$ (notée $\mathscr{C}_1$ sur le graphique de gauche).
- La fonction g_2 définie par $x \mapsto \frac{1}{3-x}$ tend, quant-à elle, vers 0 en $+\infty$ (notée $\mathscr{C}_2$).
- Les fonction g_3 et g_4 définies par $g_3(x) = -2x^2$ et $g_4(x) = \frac{x^2}{2}$, ont une limite infinie. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_4(x) = +\infty$ (la détermination de ces limites est très simple à l'aide des théorèmes qui suivent). Les courbes sont notées $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ sur le graphique de droite.

Fonction ayant des limites finies en $+\infty$:



La courbe s'approche de son asymptote horizontale (limite finie).

Fonction ayant des limites $\pm\infty$ en $+\infty$:



La courbe dépasse toute valeur arbitraire A vers le haut (limite $+\infty$) ou vers le bas (limite $-\infty$).

Propriété 2.3 (Unicité de la limite) Si une fonction f admet une limite finie l en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) alors cette limite est unique.

Démonstration Supposons que f admette deux limites l et l' en $+\infty$.
On a alors $\forall \epsilon > 0,\ \exists x_0 > a,\ \forall x > x_0, |f(x) - l| < \epsilon$
Et de même $\forall \epsilon > 0,\ \exists x'_0 > a,\ \forall x > x'_0, |f(x) - l'| < \epsilon$
D'après l'inégalité triangulaire $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |a+b| < |a| + |b|)$, on a alors
$|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| < |l - f(x)| + |f(x) - l'| < 2\epsilon$.
Par conséquent $\forall \epsilon > 0,\ \forall x > \max(x_0, x'_0),\ |l - l'| < 2\epsilon$.
$|l - l'|$ peut donc être rendu aussi petit qu'on veut, donc plus petit que lui-même...
Cela étant impossible, on doit donc avoir $l = l'$.

1.b. Limite en un point

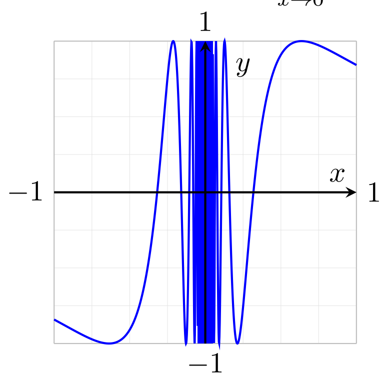
Définition 2.3 (Limite en un point) Une fonction f admet 0 comme limite en a si, quel que soit le nombre A, dès que x est assez proche de a, la valeur absolue de $f(x)$ est plus proche de 0 que A. Autrement dit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0, |x - a| < \epsilon \implies |f(x)| < A$

l étant un réel, une fonction f admet l comme limite en a si la fonction $f - l$ admet pour limite 0 en a. Autrement dit, s'il existe une fonction φ de limite 0 en a, telle que $f(x) = l + \varphi(x)$.

Remarques :

- La question de la limite en un point a est un problème à résoudre lorsqu'on est au bord de l'ensemble de définition de la fonction car $\forall x \in \mathscr{D}_f, \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. La fonction $f : x \mapsto \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$ par exemple n'est pas définie pour $x = 0$. On va simplifier par $x \neq 0$ et faire « tendre » x vers 0 : pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{(1+x)^3-1}{x} = \frac{1+3x^2+3x+x^3-1}{x} = \frac{x(3x+3+x^2)}{x} = 3x + 3 + x^2$.
La simplification finale n'est possible que si
$x \neq 0$ et, quand x s'approche infiniment près de 0, $3x+3+x^2$ s'approche de 3, soit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$.

- Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement une limite en un point.
Par exemple la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0 : quand x s'approche de 0, $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini, et la fonction sin continue bravement à osciller entre -1 et $+1$ pour chaque intervalle d'amplitude 2π. La courbe obtenue contient une infinité d'oscillations dans la zone bleutée. On peut dilater cette zone autant qu'il nous plait, il y aura toujours cette zone au voisinage de 0.



- En considérant que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$, on peut ramener la recherche d'une limite en un point a, à la recherche de la limite en 0. Il suffit pour cela d'effectuer le changement de variable $x = a + h$. Lorsque h tend vers 0, x tend bien vers a.
La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-x-2}{x-2}$, par exemple, n'est pas définie pour $x = 2$.
En écrivant $x = 2 + h$, on a $f(2+h) = \frac{(2+h)^2-(2+h)-2}{(2+h-2)^2} = \frac{h^2+3h}{h} = h + 3$.
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(2+h) = \lim\limits_{h \to 0} h + 3 = 3$.
Ici $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$ se simplifie directement : si $x \neq 2$ on a $f(x) = x + 1$, et $\lim\limits_{x \to 2} x + 1 = 3$.
La fonction f peut être « prolongée par continuité » en la fonction affine $x \mapsto x + 1$.

Définition 2.4 (Limite infinie en un point) Une fonction f admet $+\infty$ comme limite en a si, quel que soit le nombre A, dès que x est assez proche de a, on a $f(x) > A$.
Autrement dit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0,\ |x-a| < \epsilon \Longrightarrow f(x) > A$

Remarques :

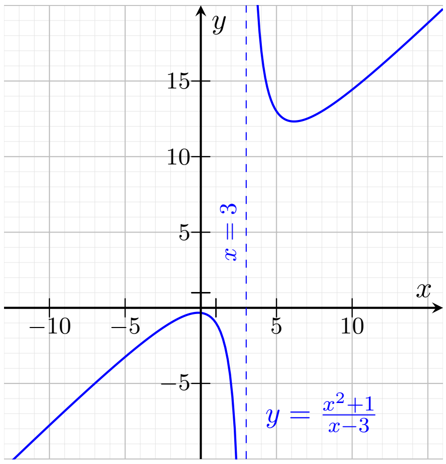
- On définit de même ce que signifie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Lorsque la limite d'une fonction f en a est $\pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une « asymptote verticale » à la courbe représentative de f (la courbe s'approche de son asymptote sans jamais l'atteindre).

Exemple 1 – La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x-3}$ n'est pas définie pour $x = 3$.

En écrivant $x = 3 + h$, on a
$f(3+h) = \frac{(3+h)^2+1}{3+h-3} = \frac{h^2+6h+10}{h} = h + 6 + \frac{10}{h}$
Quand on fait tendre x vers 3, soit h vers 0, $h+6$ tend vers 6, mais $\frac{10}{h}$ tend vers l'infini. Il parait alors évident que $f(3+h)$ tend vers l'infini : $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \pm\infty$.
La droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f. Comme f est définie des deux côtés de la valeur interdite $x = 3$, il y a deux limites :

- la limite à gauche notée $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)$
- la limite à droite notée $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)$

Ici, on a $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$.



Propriété 2.4 (Limites de référence en 0) Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0 en 0 : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, etc. (soit $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \sqrt{x}$.
n étant un entier non nul, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ont pour limite $+\infty$ en 0, excepté lorsque n est impair, la limite à gauche de 0 est alors $-\infty$.

Démonstration Pour ne pas trop nous répéter, nous laissons cette démonstration au lecteur.

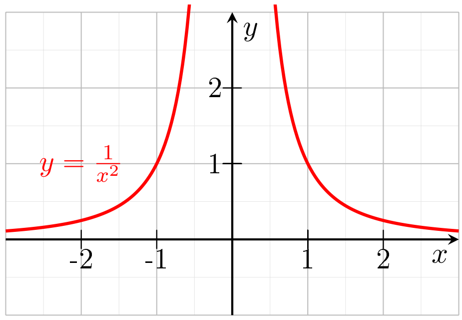
Remarque :

La fonction inverse correspond à $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ pour $n = 1$.
n étant impair, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, ce que l'examen de la courbe laisse déjà supposer.
On peut alors compléter le tableau de variation de cette fonction, en y faisant figurer les limites en 0 et aussi en $\pm\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

Pour $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $n = 2$ étant pair, la propriété affirme que les deux limites (à gauche et à droite de 0) sont $+\infty$.

Cela se voit sur la courbe et se note dans le tableau des variations de cette fonction.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x^2}$	$0 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

1.c. Théorèmes sur les Limites

Dans cette section, nous reprenons sans les démontrer les différents théorèmes qui sont exposés dans le chapitre sur les suites. Pour une suite, il ne s'agissait que de la limite éventuelle en $+\infty$. Il faut ici les transposer pour des limites éventuelles en $-\infty$ et aussi au voisinage d'un point a (à gauche ou à droite, là où la fonction n'est pas définie).

Théorème 2.1 (croissance majorée) Toute fonction croissante et majorée sur un intervalle $[a;+\infty[$ admet une limite finie l en $+\infty$ qui est le plus petit majorant de la fonction.
De même, pour toute fonction décroissante et minorée : sa limite est le plus grand des minorants.

Remarques :

- Exemples de transposition :
  - Toute fonction décroissante et minorée, définie sur un intervalle de la forme $[a;b[$ admet une limite à gauche finie l en b qui est le plus grand des minorants.
  - Toute fonction croissante et minorée, définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;a]$ admet une limite finie l en $-\infty$ qui est le plus grand des minorants.
- Une fonction f a une limite finie l en $\pm\infty$ si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - l = 0$. Dans ce cas la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale δ d'équation $y = l$ dans ce voisinage et on détermine la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à δ en examinant le signe de cette limite.

Théorème 2.2 (Comparaison) Soient f et g deux fonctions.
Si, à partir d'un certain réel x_0, on a $f \geqslant g$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
De même, si à partir d'un réel x_0, on a $f \leqslant g$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème 2.3 (Encadrement) Soient f, g et h trois fonctions. Si, à partir d'un certain réel x_0, on a $g \leqslant f \leqslant h$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Exemple 2 – La fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, soit en 0 et en $\pm\infty$.

Lorsque $x > 0$, on a $0 < 1 < 2x + 1$ et, en ajoutant $x^2 > 0$, on obtient l'encadrement $x^2 < 1 + x^2 < (1 + x)^2$.
Comme la fonction racine carrée est croissante, cela implique que $x < \sqrt{1 + x^2} < 1 + x$.
En divisant par $x > 0$, on obtient l'encadrement de $f(x)$

$$1 < f(x) < 1 + \frac{1}{x}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$, d'après le théorème 2.3, on peut donc conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

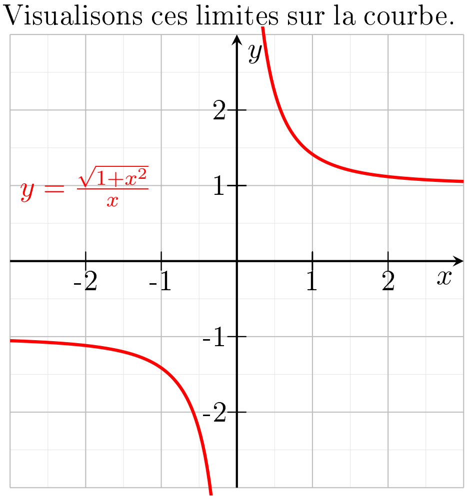
Au voisinage de $0+$ (x tend vers 0 et $x > 0$), la majoration $f(x) < 1 + \frac{1}{x}$ ne permet pas de conclure.
Par contre, on peut remarquer que $1 < \sqrt{1 + x^2}$ et donc

$$\frac{1}{x} < f(x)$$

Comme $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, d'après le théorème 2.2, on peut donc conclure que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

Voilà pour les deux bornes ouvertes positives de $\mathscr{D}_f$. Pour les deux autres, il suffit de remarquer que la fonction est impaire. En effet, $f(-x) = \frac{\sqrt{1+(-x)^2}}{-x} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -f(x)$. Les limites seront donc « symétriques » par rapport à O : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Visualisons ces limites sur la courbe.



Complétons le tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

Théorème 2.4 (somme et produit par un réel) Soient f une fonction qui tend vers $+\infty$ et k un réel non nul.

- La fonction $(f+k)$ tend vers $+\infty$ et, si $k>0$, la fonction (kf) aussi
- Si $k<0$, la fonction (kf) tend vers $-\infty$

Théorème 2.5 (Somme et Produit de fonctions) Soient f et g deux fonctions ayant une limite, finie ou infinie. Les fonctions $f+g$ et $f\times g$, admettent ou non une limite selon les différents cas exposés par les deux tableaux ci-dessous :

Fonction « somme » : $(f+g)$

$\lim g$ \ $\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	//////
$-\infty$	$-\infty$	//////	$-\infty$

Fonction « produit » : $(f\times g)$

$\lim g$ \ $\lim f$	$l\neq 0$	$l=0$	$\pm\infty$
$l'\neq 0$	$l\times l'$	0	$\pm\infty$
$l'=0$	0	0	//////
$\pm\infty$	$\pm\infty$	//////	$\pm\infty$

Théorème 2.6 (Quotient de fonctions) Soient f et g deux fonctions ayant une limite, finie ou infinie. La fonction quotient $\frac{f}{g}$ admet ou non une limite selon les différents cas exposés par le tableau ci-dessous :

$\lim g$ \ $\lim f$	$l\neq 0$	$l=0$	$\pm\infty$
$l'\neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$
$l'=0$	$\pm\infty$	//////	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0	0	//////

Remarques :

- Pour un produit ou un quotient, c'est la règle des signes qui détermine le signe des limites.
- Les *formes indéterminées* (les cas hachurés ci-dessus) sont de quatre types :
  - $\pm(\infty-\infty)$, par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+1}$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1$
  - $\pm(0\times\infty)$, par exemple $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)(\ln x+1)$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x^2+1)$
  - $\pm\frac{0}{0}$, par exemple $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x-1}}$ ou $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$
  - $\pm\frac{\infty}{\infty}$, par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^3-1}$

  Une factorisation suivie d'une simplification suffit parfois à lever l'indétermination.

Méthode (Fonction polynôme)
Pour une fonction polynôme de degré p : $f : x\mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$, la limite au voisinage de $\pm\infty$ est celle du terme dominant (celui de plus haut degré) :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sum_{k=0}^{p} a_k x^k = \lim a_p x^p$$

- Au voisinage de $+\infty$: si $a_p>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ mais si $a_p<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
- Au voisinage de $-\infty$, on doit tenir compte de la parité de p :
  - Si $a_p>0$ et p pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, si $a_p>0$ et p impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
  - Si $a_p<0$ c'est l'inverse : si p pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; si p impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$).

La généralité énoncée s'étend aux fonctions polynomiales ayant des termes de degré négatif.
La fonction f définie par $f(x)=-x^3+3x^2-2x+1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}$, par exemple, a un comportement au voisinage de $\pm\infty$ qui est celui du terme de plus haut degré (de $-x^3$ ici).

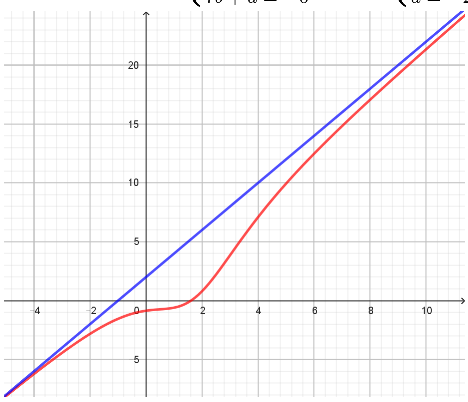
Exemple 3 – ➲ Justifions la propriété sur les limites de polynômes par un exemple où l'indétermination est du type $\infty - \infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3-4x^2+5x-6 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)$.
Or, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ étant une fonction de référence de limite 0 en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{4}{x} = 0$.
De même $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6}{x^3} = 0$. On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3} = 2$.
Finalement, d'après les théorèmes sur les opérations avec les limites :
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$. Et de même
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.
Le même procédé de factorisation du monôme de plus haut degré conduit toujours au même résultat : c'est lui qui détermine la limite du polynôme en $\pm\infty$.

➲ On peut aussi généraliser la détermination de la limite d'un quotient de deux polynômes en $\pm\infty$ (à priori, elle est du type $\pm\frac{\infty}{\infty}$) : elle est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3-4x^2+5x-6}{x^2-3x+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}$.
Comme précédemment $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2} = 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.

Á propos de cette fonction, montrons que sa courbe admet une *asymptote oblique*.
Montrons qu'on peut écrire l'expression $\frac{2x^3-4x^2+5x-6}{x^2-3x+7}$ sous la forme $ax+b+\frac{cx+d}{x^2-3x+7}$.
En mettant la 2^e^ expression au même dénominateur, on doit
avoir : $\frac{2x^3-4x^2+5x-6}{x^2-3x+7} = \frac{ax^3+(b-3a)x^2+(c+7a-3b)x+7b+d}{x^2-3x+7}$

Par identification des coefficients des monômes de même degré, on doit avoir $\begin{cases} a=2 \\ b-3a=-4 \\ c+7a-3b=5 \\ 7b+d=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=-3 \\ d=-20 \end{cases}$

Conclusion : $\frac{2x^3-4x^2+5x-6}{x^2-3x+7} = 2x+2-\frac{3x+20}{x^2-3x+7}$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+20}{x^2-3x+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0^+$,
on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3-4x^2+5x-6}{x^2-3x+7} - (2x+2) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = 0^-$.
De même $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3-4x^2+5x-6}{x^2-3x+7} - (2x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3}{x} = 0^+$.
La droite d'équation $y = 2x+2$ est donc asymptote à la courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{2x^3-4x^2+5x-6}{x^2-3x+7}$ au voisinage de l'infini ; la courbe est au dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et, même si ça ne se voit pas sur l'illustration, au dessus au voisinage de $-\infty$.



➲ Montrons un autre procédé pour lever une indétermination sur les limites avec des racines carrées.
Comme souvent avec les racines carrées, on utilise la *quantité conjuguée*.
Cherchons la limite de $x \longmapsto x-\sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$ (elle est du type $\infty-\infty$).
$\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.
Ainsi transformée, l'expression a perdu son indétermination : comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1} = +\infty$,
on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+1} = 0^-$ (le signe de la limite peut être utile).

➲ Un dernier exemple de levée d'indétermination sur les limites avec une fonction exponentielle.
Cherchons la limite de $x \longmapsto \frac{e^x}{x}$ en $+\infty$ (elle est du type $+\frac{\infty}{\infty}$).
Étudions les variations de la fonction f définie par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. On a $f'(x) = e^x - x$.
On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x+1 > x$ (par l'étude de la fonction $x \longmapsto e^x - x - 1$).
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x > 0 \iff f'(x) > 0$; f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $x > 0 \Longrightarrow f(x) > f(0) \iff e^x - \frac{x^2}{2} > e^0 - \frac{0^2}{2} \iff e^x - \frac{x^2}{2} > 1 \iff e^x > \frac{x^2}{2} + 1 > \frac{x^2}{2}$.
En divisant par $x > 0$ on obtient $\forall x > 0, \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Propriété 2.5 (Fonction composée) Soient a, l et l' des nombres finis ou infinis, soit f une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert $I =]a, b]$ ou $[b, a[$ et soit g une fonction définie sur un intervalle $J = f(I)$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et si $\lim\limits_{x\to l} g(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x) = l'$.

Démonstration Nous admettrons cette propriété qui admet de nombreuses situations (a, l et l' pouvant être finis ou infinis)

Remarques :

- J'ai déjà implicitement employé cette propriété :
  Pour la 3e limite du précédent exemple (la limite de $x \longmapsto x - \sqrt{x^2+1}$) j'ai affirmé sans preuve que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ mais il s'agit de la limite d'une fonction composée $g\circ f$ avec la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 1$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
  La propriété énoncée nous permet alors de conclure : $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x) = +\infty$
  (dans ce cas, on a $a = l = l' = +\infty$)
- Cette propriété peut servir à déterminer la limite d'une suite (v_n) définie par la relation $v_n = f(u_n)$ où (u_n) est une suite de limite $l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ et f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to l} f(x) = l' \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. Dans ces conditions, la suite (v_n) admet pour limite l'.

Exemple 4 – Étudions le comportement asymptotique de la suite (v_n) définie par $v_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
On écrit $v_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ et on reconnait que $v_n = \dfrac{\sin u_n}{u_n} = f(u_n)$ avec $u_n = \frac{1}{n}$ défini pour $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
Les termes u_n appartiennent tous à l'intervalle $]0, 1]$ et la fonction f est définie sur cet intervalle.

Nous l'avons déterminée en classe de 1re et nous le rappelons : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
On peut comprendre cela si on admet que $\sin'(x) = \cos(x)$ car cette limite équivaut au nombre dérivé en 0 de la fonction sinus : $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\sin h - \sin 0}{h-0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = 1$.

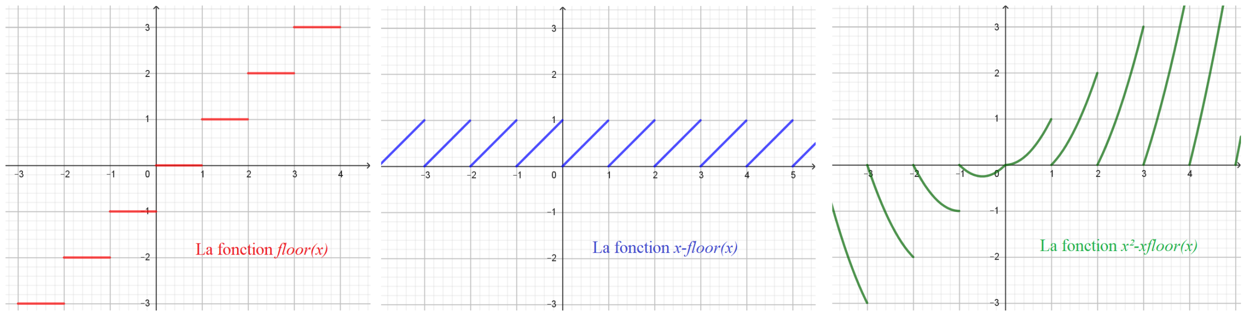
2. Fonctions continues

2.a. Continuité

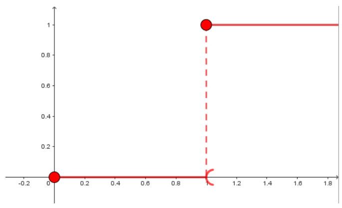
Définition 2.5 (Continuité en un point) Une fonction f, définie sur un intervalle I est continue en un réel $x_0 \in I$ si et seulement si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarques :
On définit la continuité *à droite* en $x_0 \in I$ si la fonction f vérifie :
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$ (on note aussi cela $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$).
De même, on définit la continuité *à gauche* en $x_0 \in I$ si la fonction f vérifie :
$\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = f(b)$ (on note aussi cela $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$).
Ainsi, la continuité en $x_0 \in I$ est la conjonction d'une continuité à droite et à gauche en x_0.

Inversement, si une fonction est définie en un point $x_0 \in I$ mais si elle n'est pas continue d'un côté (à droite ou à gauche), alors elle n'est pas continue en x_0. Dans ce cas, lorsqu'on trace la courbe de cette fonction, on doit lever le stylo en passant par la valeur x_0. Ci-dessous, j'ai tracé trois fonctions discontinues en tous points entiers de $\mathbb{R}$. Elles sont obtenues à partir de la fonction *floor* – la fonction « plancher« : $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$) – discontinue à gauche car $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1$ alors que $\lfloor n \rfloor = n$.



La discontinuité est parfois représentée par un procédé graphique tel que celui ci-contre mais les traceurs de courbe (logiciels, calculatrices, etc.) n'entrent généralement pas dans ces considérations (ci-dessus tracés avec Geogebra).



Propriété 2.6 Soit I un intervalle où la fonction f est définie et soit $x_0 \in I$.
f est continue en x_0 si et seulement si l'une des propositions suivantes est vraie :

- $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$
- $\forall A > 0, \exists \epsilon > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < A$

Démonstration La première proposition traduit simplement la définition d'une fonction continue en x_0 en posant $x = x_0 + h$ et en faisant tendre h vers 0 on fait tendre x vers x_0.

La seconde traduit la définition 2.3 : une fonction f admet une limite l en x_0 si et seulement si
$\forall A > 0,\ \ \exists \epsilon > 0, |x - x_0| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < A$
On voit qu'il suffit ici de remplacer l par $f(x_0)$ qui existe puisque la fonction est définie en x_0.

Définition 2.6 (Continuité sur un intervalle) Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I. f est continue sur I si et seulement si elle est continue en tous points $x_0 \in I$.

La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $[n, n+1[$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et discontinue sur $\mathbb{R}$.

Propriété 2.7 (Fonctions de référence) Les fonctions de référence suivantes sont continues sur leur ensemble de définition :

- Continues sur $\mathbb{R}$: les fonctions polynômes, la fonction exponentielle, les fonctions sinus et cosinus, la fonction valeur absolue
- Continue sur $\mathbb{R}^+$: la fonction racine carrée

Toute fonction obtenue par opérations ou composition avec les fonctions de référence est continue sur tout intervalle I où elle est définie.

Démonstration Cette propriété est admise.

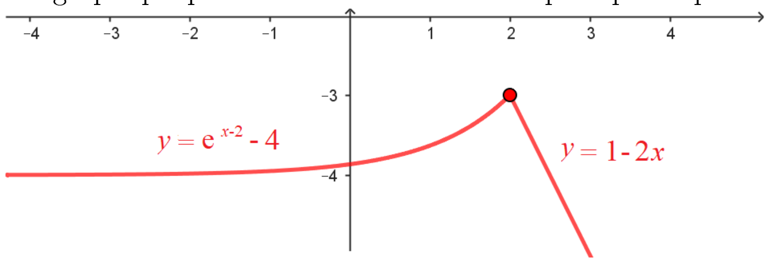
Remarques :

- La fonction $x \longmapsto \frac{e^x+1}{x^2-1}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Sur chacun des intervalles où elle est définie ($]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$) cette fonction est continue car c'est le quotient de deux fonctions continues $x \longmapsto e^x+1$ et $x \longmapsto x^2-1$. D'une façon générale une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La question de la continuité sur un intervalle est ramenée à la continuité en un point pour des fonctions définies par morceaux, chacun étant continus d'après la propriété 2.7.

  Exemple : la fonction f est définie par $\begin{cases} 1-2x & \text{si } x \geqslant 2 \\ e^{x-2}-4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

  Cette fonction est continue sur $]-\infty,2[$ car elle y est définie par composition et somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$; f est aussi continue sur $[2,+\infty[$ car c'est alors une fonction affine, continue sur $\mathbb{R}$.

  Pour montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, il faut montrer la continuité à gauche en 2 :
  $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} e^{x-2}-4 = e^0-4 = -3$. Or $f(2) = 1-2\times 2 = -3$.
  Donc $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$: la fonction f est continue à gauche et par conséquent continue sur $\mathbb{R}$.
  Un graphique peut le confirmer mais il ne peut pas le prouver.

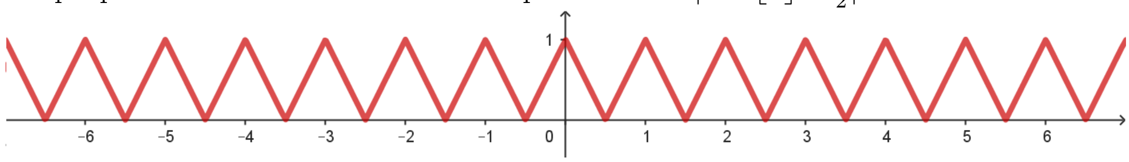


Propriété 2.8 (Fonction dérivable) Soient I un intervalle ouvert et f une fonction.
Si la fonction f est dérivable sur I alors elle est continue sur I.

Démonstration Si la fonction est dérivable en un point $x_0 \in I$, cela signifie que :
$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$ où φ est une fonction de limite 0 en 0 (voir le cours de 1re).
On en déduit $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim\limits_{h\to 0} f(x_0) + \lim\limits_{h\to 0} hf'(x_0) + \lim\limits_{h\to 0} h\varphi(h) = f(x_0)$ ce qui est, d'après la propriété 2.6, une caractéristique de la continuité en x_0.

Remarques :

- Cette déduction se fait sur un intervalle ouvert I car il peut se trouver qu'une fonction ne soit pas dérivable aux bornes d'un intervalle fermé où elle est définie. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ par exemple est définie et continue sur $[0,+\infty[$ alors qu'elle n'est dérivable que sur $]0,+\infty[$. En effet, $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h-0} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$, sa dérivée en 0 n'est pas définie.
- Une fonction continue sur un intervalle ouvert I n'est pas forcément dérivable en tous points : il suffit de considérer la fonction $x \longmapsto |x|$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^-} |x|' = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x)' = -1$ alors que $\lim\limits_{x\to 0^+} |x|' = \lim\limits_{x\to 0^-} (x)' = 1$.
  Et que penser de cette fonction dont l'expression est $2|x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}|$?



PROPRIÉTÉ 2.9 (SUITES) Soient I un intervalle ouvert, f une fonction définie sur I et (u_n) une suite telle que $\forall n,\ u_n \in I$. Si f est continue sur I et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in I$, alors :

- La suite (v_n) définie par la relation $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(l)$.
- La suite (u_n) définie par une valeur initiale et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers une des solutions de l'équation $l = f(l)$.

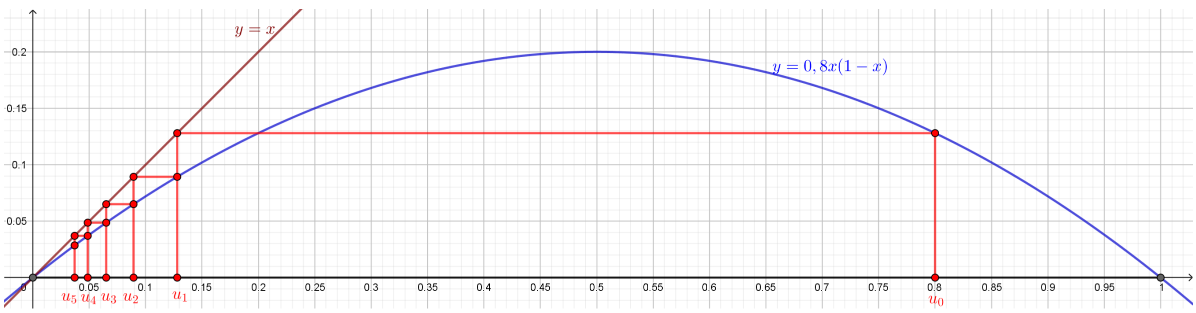
DÉMONSTRATION ➠ Pour la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$:
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et comme f est continue en $l \in I$, d'après la propriété 2.5 on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.

➠ Pour la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et une valeur initiale, par exemple u_0 :
D'après la propriété précédente, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
La suite (u_{n+1}) est une suite dont tous les termes sont identiques à ceux de la suite (u_n), excepté le terme u_0 qui manque à la suite (u_{n+1}), on peut donc affirmer que $\lim\limits_{n+1\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} u_N = l$.
La propriété 2.3 d'unicité de la limite permet de conclure : $f(l) = l$.

Remarques :

- Donnons un exemple d'application de la 1^re^ propriété : la suite (u_n) définie par $u_n = e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$ est une suite du type $u_n = e^{v_n}$ où v_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1 ; on en déduit que $v_n = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$; la suite (v_n) converge vers $l = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 2$; comme la fonction $x \longmapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que (u_n) converge vers $e^l = e^2$.
- Dans les conditions de la 2^e^ propriété, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers une des solutions de l'équation $f(x) = x$ (il peut y avoir plusieurs solutions mais il ne peut y avoir qu'une seule limite). La réciproque est fausse : le fait qu'il existe une solution à l'équation $f(x) = x$ ne signifie pas que la suite (u_n) converge.

EXEMPLE 5 (SUITE LOGISTIQUE) – On considère une suite (x_n) définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$, $x_0 \in [0;1]$ où μ est un paramètre qui appartient à l'intervalle $[0;4]$.
Je choisis $\mu = 0,8$ et $x_0 = 0,8$ et trace la courbe d'équation $y = 0,8x(1-x)$.
On constate que la suite (x_n) est décroissante et semble converger vers 0.

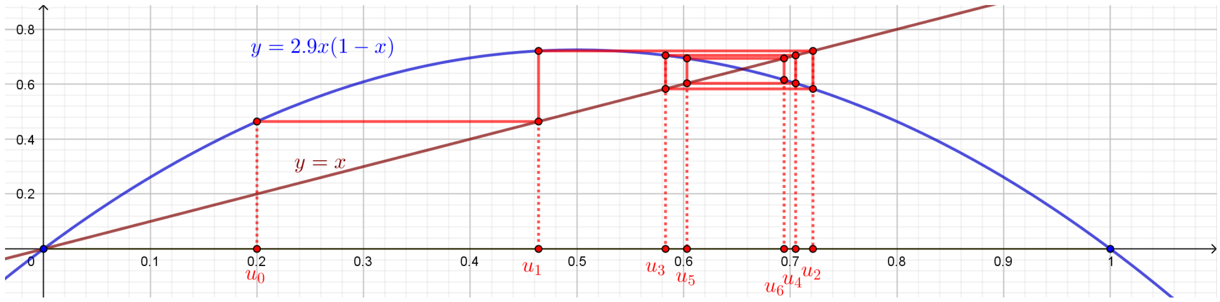


Si la suite converge vers une limite l, celle-ci est solution de l'équation $x = \mu x(1-x)$ qui a pour solution évidente $x = 0$, l'autre étant la solution de $1 = \mu(1-x) \Longleftrightarrow x = 1 - \frac{1}{\mu}$.
Ainsi, les deux valeurs potentielles pour la limite de cette suite sont 0 et $1 - \frac{1}{\mu}$ (ici $1 - \frac{1}{0{,}8} = -0,25$).

Montrons que, lorsque $0 < \mu < 1$, la suite converge.
Montrons par récurrence que les termes de la suite (x_n) sont tous compris entre 0 et 1 :
En effet, on a $x_0 \in [0;1]$. Supposons que $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ et montrons que $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant 1$
$-1 \leqslant -x_n \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant 1 - x_n \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant \mu x_n(1-x_n) \leqslant \mu x_n \leqslant \mu < 1 \Longrightarrow 0 \leqslant x_{n+1} < 1$.
Si $x_n \neq 0$ on a $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \mu(1-x_n)$ et comme $0 \leqslant \mu(1-x_n) \leqslant \mu < 1$ on en déduit que $0 \leqslant \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1$.
La suite (x_n) est donc décroissante et minorée par 0. Sa limite est donc supérieure ou égale à 0.

L'autre limite potentielle étant négative ($0 < \mu < 1 \Longrightarrow \frac{1}{\mu} > 1 \Longrightarrow 1 - \frac{1}{\mu} < 0$) sa limite est 0.

Ci-dessous j'ai représenté le cas $\mu = 2,9$ avec $x_0 = 0,2$ donc lorsque $x_{n+1} = 2,9x_n(1 - x_n)$.
La suite semble s'approcher alternativement de la 2[e] limite potentielle qui est ici $1 - \frac{1}{2,9} = \frac{19}{29} \approx 0,655$.



2.b. Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Théorème 2.7 (Valeurs Intermédiaires) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout réel λ entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins une valeur $\alpha \in [a, b]$ telle que $f(\alpha) = \lambda$.

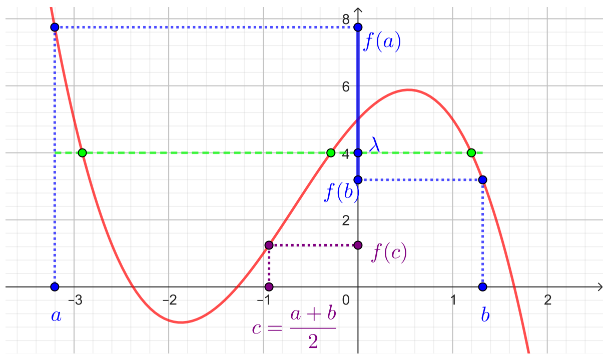
Démonstration Dans le cas $f(a) = \lambda$ (respect. $f(b) = \lambda$), on en déduit que $\alpha = a$ (resp. $\alpha = b$).
Dans les autres cas, supposons que l'on ait $f(a) < \lambda < f(b)$ (même raisonnement si $f(b) < \lambda < f(a)$).
Écrivons cela $f(a) - \lambda < 0 < f(b) - \lambda$; en définissant $g : x \longmapsto f(x) - \lambda$, cela s'écrit $g(a) < 0 < g(b)$.
$g(a) < 0$ et $g(b) > 0$, autrement dit $g(a) \times g(b) < 0$.
Notons $a_0 = a$ et $b_0 = b$ ces premières valeurs de deux suites (a_n) et (b_n) que l'on va construire.
Prenons $c = \frac{a_0+b_0}{2}$ et calculons $g(c)$:

- Si $g(c) = 0$ on a trouvé la valeur $\alpha = c$ cherchée et on s'arrête (sinon on continue)
- Si $g(c) > 0$ on donne à b_1 la valeur de c (a_1 conserve la valeur a_0)
- Si $g(c) < 0$ on donne à a_1 la valeur de c (b_1 conserve la valeur b_0)

Dans les deux premiers cas, le nouvel intervalle $[a_1, b_1]$ a une amplitude moitié de l'intervalle $[a_0, b_0]$: $b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$. De plus, on remarque que $a_0 \leqslant a_1$ et $b_0 \geqslant b_1$. Ce choix implique $g(a_1) < 0$ et $g(b_1) > 0$, on a donc $g(a_1) \times g(b_1) < 0$ et on se retrouve dans la situation initiale.
Selon le signe de $g(\frac{a_1+b_1}{2})$ on détermine l'intervalle $[a_2, b_2]$ tel que $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b_0-a_0}{4}$ avec $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2$, $b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2$, $g(a_2) < 0$ et $g(b_2) > 0$, puis on détermine $[a_3, b_3]$, $[a_4, b_4]$, etc. $[a_n, b_n]$ tels que $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$ avec $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_0 \geqslant b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_n$, autrement dit (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes qui convergent vers une même limite car (a_n) est croissante, (b_n) décroissante et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_0-a_0}{2^n} = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
Pour tout n, $g(a_n) < 0$ et $g(b_n) > 0$, cette limite commune notée α vérifie $g(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow f(\alpha) = \lambda$.

Remarques :

- La démonstration de ce théorème est constructive : elle fournit un procédé de calcul – appelé « algorithme de dichotomie » – qui détermine une valeur approchée d'un antécédent de l'équation $f(x) = \lambda$ à la précision souhaitée. Le programme Python ci-dessous traduit cet algorithme et l'applique à la fonction $f : x \longmapsto -x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ représentée sur l'illustration pour $\lambda = 4$ et $[a, b] = [-3,2; 1,32]$ à la précision 10^{-9}.
- Dans les conditions de cette proposition, la solution de l'équation $f(x) = \lambda$ n'est pas forcément unique. La figure ci-dessous montre un cas où il y a 3 solutions dans l'intervalle $[a, b]$. On constate, en observant ce graphique que l'algorithme de dichotomie aboutira à la solution la plus petite (environ $-2,9$) car dans cette situation, comme $f(a) > \lambda$ et $f(\frac{a+b}{2}) < \lambda$, on aura $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$ (les deux autres solutions sont supérieures à $\frac{a+b}{2}$).



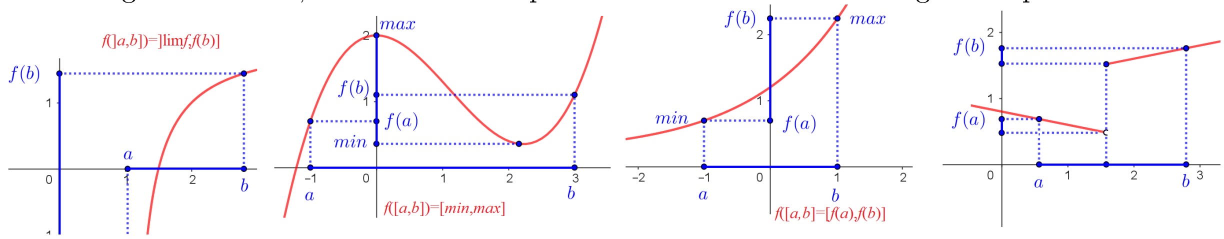

```
def f(x):
    return -x**3-2*x**2+3*x+5

def dichomie(a,b,k,p):
    while b-a>p :
        c=(a+b)/2
        if (f(a)-k)*(f(c)-k)<=0:
            b=c
        else:
            a=c
    return (a,b)

print(dichomie(-3.2,1.32,4,10**-9))
```

```
(-2.9122291789203896, -2.9122291783941923)
```

Propriété 2.10 (Intervalle image) Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- $f(I)$ – l'ensemble image de I – est un intervalle.
- Si I est un intervalle fermé alors $f(I)$ est l'intervalle fermé $[\min, \max]$ où min et max sont le minimum et le maximum de f sur I.
- Si $I = [a, b]$ est un intervalle fermé et si f est monotone alors $f(I)$ est fermé. $(f(I) = [f(a), f(b)]$ si f croissante ou $[f(b), f(a)]$ si f décroissante)

Démonstration Cette propriété est la conséquence directe du TVI ; en voici des illustrations. Dans la figure de droite, la fonction n'est pas continue et l'ensemble image n'est pas un intervalle.



Théorème 2.8 (Bijection) Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout réel λ entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \lambda$.

Démonstration D'après le TVI, comme f est continue, il existe au moins une valeur $\alpha \in [a, b]$ telle que $f(\alpha) = \lambda$. Pour montrer que cette valeur est unique, supposons que f est strictement croissante :

- $\forall x \in [a, b],\ \ x < \alpha \Longrightarrow f(x) < f(\alpha) = \lambda$; l'équation $f(x) = \lambda$ n'a pas de solution sur $[a, \alpha[$.
- $\forall x \in [a, b],\ \ x > \alpha \Longrightarrow f(x) > f(\alpha) = \lambda$; l'équation $f(x) = \lambda$ n'a pas de solution sur $]\alpha, b]$.

Le même raisonnement conduit à l'unicité dans le cas où f est strictement décroissante.

Remarques :

- Si f est strictement croissante (respect. décroissante) alors $\forall \lambda \in [f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$), l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $[a, b]$.
  Pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution à une équation $f(x) = \lambda$ dans un intervalle $[a, b]$, il faut donc :
  — Prouver la continuité de f sur $[a, b]$
  — Prouver la stricte monotonie de f sur $[a, b]$ (notamment par l'étude du signe de f')
  — Calculer $f(a)$ et $f(b)$ puis montrer que $f(a) \leqslant \lambda \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant \lambda \leqslant f(a)$
  — Conclure en rappelant ou en citant le théorème de la bijection.
- On appelle cette propriété, le *théorème de la bijection* car f réalise alors une bijection de I (l'ensemble de départ) sur $J = f(I)$ (l'ensemble d'arrivée). Pour qu'une fonction soit une bijection de I sur J il faut et il suffit que tout élément de J ait une unique antécédent dans I, ce qu'assure ce théorème. Noter qu'on peut décliner cette propriété sur un intervalle ouvert

$]a,b[$ ou semi-ouvert $]a,b]$ ou $[a,b[$. Exemples de bijections (toutes les fonctions strictement monotones sur un intervalle) : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$, $x \longmapsto e^x$ sur $]-\infty,+\infty[$, $x \longmapsto x^2$ sur $[-\infty,0]$, $x \longmapsto \sin x$ sur $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, etc.

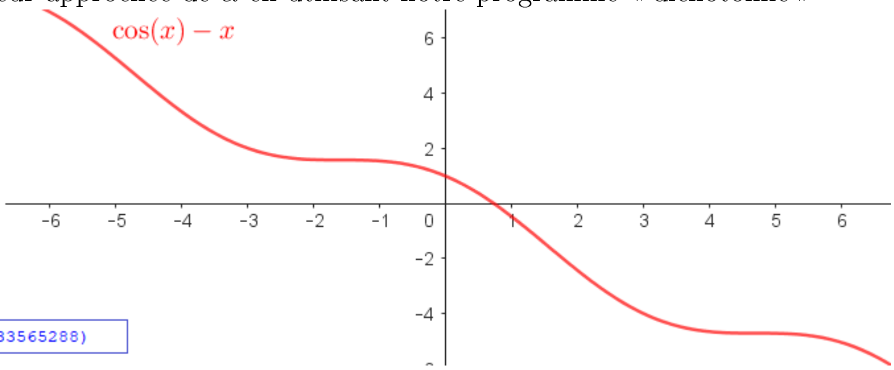
Exemple 6 – Montrons que l'équation $\cos x = x$ a une solution unique dans $[0,\pi]$.
Pour cela définissons la fonction $f : x \longmapsto \cos x - x$.
La question revient à prouver que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[0,\pi]$.

- f est continue sur $[0,\pi]$ comme somme de fonctions continues sur $[0,\pi]$
- $f'(x) = \sin x - 1$ or $\forall x \in [0,\pi],\ \sin x \leqslant 1 \iff \sin x - 1 \leqslant 0$ avec égalité seulement pour $x = \frac{\pi}{2}$ donc f est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.
- $f(0) = 1 - 0 = 1$ et $f(\pi) = -1 - \pi \approx -4,14 < 0$; on en déduit $f(\pi) \leqslant 0 \leqslant f(0)$
- Comme f est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$, elle définit une bijection entre $[0,\pi]$ et $[f(\pi),f(0)]$ et comme, de plus, $0 \in [f(\pi),f(0)]$, il existe un unique réel $\alpha \in [0,\pi]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

On peut déterminer une valeur approchée de α en utilisant notre programme « dichotomie »

```python
from math import cos,pi
def f(x):
    return cos(x)-x

def dichomie(a,b,k,p):
    while b-a>p :
        c=(a+b)/2
        if (f(a)-k)*(f(c)-k)<=0:
            b=c
        else:
            a=c
    return (a,b)

print(dichomie(0,pi,0,10**-9))
```

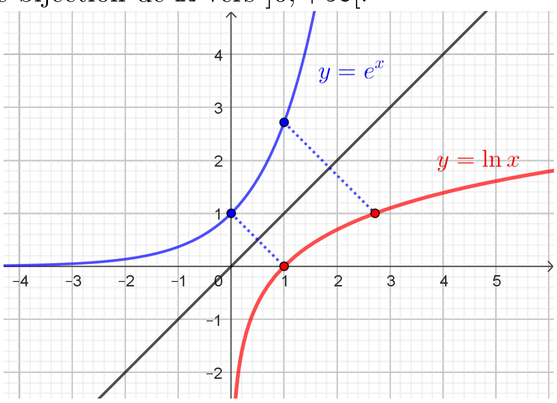
```
(0.739085132833829, 0.739085133565288)
```



> **Propriété 2.11 (Réciproque)** Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux parties de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{D}'$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
> - f est une bijection de $\mathscr{D}$ vers $\mathscr{D}'$
> - f admet une bijection réciproque, notée f^{-1}, définie sur $\mathscr{D}'$ à valeurs dans $\mathscr{D}$, c'est-à-dire que $\forall y \in \mathscr{D}',\ \exists! x \in \mathscr{D},\ \ y = f(x)$; cet antécédent unique de y est $x = f^{-1}(y)$.

Remarques :

- Il est parfois simple de déterminer l'expression de la fonction réciproque.
  — $x \longmapsto \frac{1}{x}$ de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$ est sa propre réciproque car $y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}$
  — $x \longmapsto \sqrt{x}$ de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$ a pour réciproque $x \longmapsto x^2$ car $y = \sqrt{x} \Longrightarrow x = y^2$
  — $x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}^+$ a pour réciproque $x \longmapsto \sqrt{x}$ mais $x \longmapsto -\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^-$
  — $x \longmapsto \sin x$ de $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ vers $[-1,1]$ a pour réciproque $x \longmapsto \sin^{-1} x$, aussi noté asin$x$
  — $x \longmapsto ax+b$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ a pour réciproque $x \longmapsto \frac{x-b}{a}$ car $y = ax+b \iff x = \frac{y-b}{a}$
- La fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ définie une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,+\infty[$.
  Elle admet donc une bijection réciproque de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$: cette nouvelle fonction est appelée « logarithme népérien » et notée ln et on a $y = e^x \iff x = \ln y$.
  La courbe représentative de la fonction ln est symétrique de celle de la fonction exp. Le point de coordonnées $(0,1)$ étant sur $\mathscr{C}_{\exp}$, $(1,0)$ est sur $\mathscr{C}_{\ln}$ (ce qui signifie $\ln 1 = 0$). De même, le point $(1,e)$ étant sur $\mathscr{C}_{\exp}$, $(e,1)$ est sur $\mathscr{C}_{\ln}$ (ce qui signifie $\ln e = 1$).



3. Dérivation

3.a. Dérivabilité

3.a.1. Nombre dérivé (rappel)

DÉFINITION 2.7 (NOMBRE DÉRIVÉ) Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement de la fonction au voisinage de x_0 admet une limite finie. Cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.

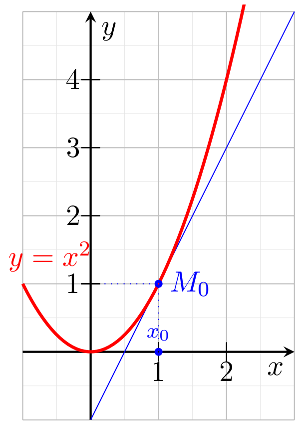
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto x^2$, est dérivable en x_0 et on a $f'(x_0) = 2x_0$ car $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-(x_0)^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2x_0h+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0$

$2x_0$ est la pente de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$.
Cette tangente est une droite d'équation :
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0x - x_0^2$
Cette équation fournit l'approximation affine $x^2 \approx 2x_0x - x_0^2$

Pour $x_0 = 1$, cette tangente a pour équation $y = 2x - 1$
et pour x proche de 1, x^2 est proche de $2x - 1$
($1,1^2 = 1,21$ et $2 \times 1,1 - 1 = 1,2$).



PROPRIÉTÉ 2.12 (INTERPRÉTATIONS) Soit f une fonction dérivable en $x_0 \in I$, un intervalle.
Graphique La tangente en x_0 à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour pente $f'(x_0)$
l'équation de cette tangente est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Cinématique $f(x_0)$ étant la distance parcourue en x_0 secondes par un objet en mouvement, la *vitesse instantanée* de cet objet à cet instant est $v(x_0) = f'(x_0)$
Numérique $\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$ est une expression de limite nulle en 0.
Ainsi $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$ est le *développement limité à l'ordre 1* de f en x_0, $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une valeur approchée de $f(x_0 + h)$ dont $|h\varphi(h)|$ en est l'erreur commise.

Remarques :

- Si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente en x_0 est horizontale. Dans ce cas et dans ce cas seulement, la fonction peut admettre un optimum (maximum ou minimum) : il suffit qu'il y ait un changement du signe de f' en x_0 (voir plus loin).
- Quand on lâche un objet sur Terre, la distance parcourue dans sa chute en t secondes est $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ m, où $g \approx 9,81 \text{m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur. La vitesse instantanée de cet objet après une chute de t secondes est $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} gt + \frac{gh}{2}$ d'où $v(t) = f'(t) = gt$
- La reconnaissance du nombre dérivé de f en x_0 peut s'opérer directement : en reconnaissant dans le développement de $f(x_0 + h)$, la forme $f(x_0) + h\alpha + h\varphi(h)$ où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, on a alors $f'(x_0) = \alpha$.
  Pour la fonction cube $f : x \mapsto x^3$, on a $f(x_0 + h) = (x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3$.
  On reconnait la forme $f(x_0) + h\alpha$ dans $x_0^3 + 3hx_0^2$ avec $\alpha = 3x_0^2$ et $h\varphi(h) = 3h^2x_0 + h^3$ car $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = \lim\limits_{h\to 0} 3hx_0 + h^2 = 0$. Le nombre dérivé de f en x_0 est donc $\alpha = f'(x_0) = 3x_0^2$.

3.a.2. Fonction dérivée

DÉFINITION 2.8 (DÉRIVABILITÉ) Pour qu'une fonction f définie en $x_0 \in I$ soit dérivable en x_0
$\Rrightarrow$ si x_0 n'est pas une borne de I, il faut et il suffit qu'elle soit :

- Dérivable à droite : f est définie pour $x > x_0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0)$ est un réel fini.
- Dérivable à gauche : f est définie pour $x < x_0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0)$ est un réel fini.
- La dérivée à gauche $f'_g(x_0)$ et la dérivée à droite $f'_d(x_0)$ doivent être égales.

$\Rrightarrow$ si x_0 est la borne inférieure (respect. supérieure) de I, il faut et il suffit qu'elle soit dérivable à droite (resp. à gauche) c'est-à-dire $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$) est fini.

Remarques :

- La fonction fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 car
  $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1$ alors que $f'_g(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1$ et donc $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.
  La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- Si x_0 est la borne inférieure (respect. supérieure) de I et si $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$) existe, alors on limite la tangente à la demi-droite d'origine $(x_0, f(x_0))$ dont les points ont une abscisse $x > x_0$ (resp. $x < x_0$) ; on parle alors de demi-tangente à droite (resp. à gauche).
  Ainsi, la fonction valeur absolue admet une demi-tangente verticale.

PROPRIÉTÉ 2.13 (CONTINUITÉ) Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ alors f est continue en x_0 et si f est dérivable en tous points de I alors f est continue sur I.

DÉMONSTRATION Si f est dérivable en x_0, son développement limité d'ordre 1 en x_0 est $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.
On en déduit $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h) = f(x_0)$ soit f est continue en x_0.
Par extension, si f est dérivable en tous points de I alors f est continue en tous points de I.

DÉFINITION 2.9 (FONCTION DÉRIVÉE) Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle l'est en tous points de I et la fonction $f' : x \longmapsto f'(x)$ – la *dérivée* de f – est définie sur I.

On a vu que la fonction cube $x \mapsto x^3$ est dérivable en tous points $x_0 \in \mathbb{R}$ et on a $f'(x_0) = 3x_0^2$.
Par conséquent la fonction $x \mapsto 3x^2$ est la dérivée de la fonction cube. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉ 2.14 (DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES) Les fonctions suivantes sont dérivables sur tout ou partie de leur ensemble de définition.

- Fonction constante : si $f(x) = k$ alors $f'(x) = 0$
- Fonction puissance : si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ f(x) = x^n$ alors $f'(x) = nx^{n-1}$
- Fonction inverse : si $\forall x \neq 0,\ \ f(x) = \frac{1}{x}$ alors $\forall x \neq 0,\ \ f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- Fonction racine carrée : si $\forall x \geqslant 0,\ \ f(x) = \sqrt{x}$ alors $\forall x > 0,\ \ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- Fonctions trigonométriques : $\forall x \geqslant 0,\ \ \cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.
  $\forall k \in \mathbb{Z},\ \ \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[,\ \ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- Fonction exponentielle : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ (e^x)' = e^x$

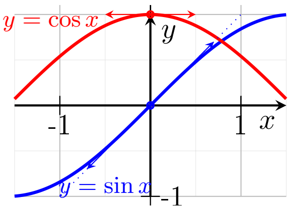
DÉMONSTRATION ➠ Pour $k \in \mathbb{R}$ et $f(x) = k$ on a $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$ d'où $f'(x) = 0$.

➠ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(x) = x^n$ on a $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x^n + nhx^{n-1} + h\varphi(h)) - x^n}{h} = nx^{n-1} + \varphi(h)$.
Comme dans tous les termes de $\varphi(h)$ il y a h, on a $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ d'où $f'(x) = nx^{n-1}$.

➠ Pour $x \neq 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ on a $\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}$.
Comme $\lim\limits_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$ on a, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

➠ Pour $x > 0$ et $f(x) = \sqrt{x}$ on a $\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}^2 - \sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$.
Comme $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ on a, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

➠ Comme on l'observe sur la courbe de la fonction sinus,
la tangente en O est la droite d'équation $y = x$, de pente 1.
En s'appuyant sur cette observation, posons que $\sin'(0) = 1$.
Ainsi $\sin(0 + h) = \sin(0) + \sin'(0)h + h\varphi(h)$,
soit $\sin(h) = h(1 + \varphi(h))$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.
Utilisons alors la formule de duplication pour exprimer $\cos(h)$:
$\cos(h) = 1 - 2\sin^2(\frac{h}{2}) = 1 - 2\frac{h^2}{4}(1 + \varphi(\frac{h}{2}))^2 = 1 + h\psi(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0} \psi(h) = 0$



On en déduit que cos est dérivable en 0 et que $\cos'(0) = 0$ (la tangente est horizontale en $(0, 1)$)
En remplaçant $\sin(h)$ et $\cos(h)$ par leurs développements limités d'ordre 1 en 0 dans les formules d'addition $(\sin(x + h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)$ et $\cos(x + h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(h)\sin(x))$,
on obtient $\begin{cases} \sin(x+h) = \sin(x)(1 + h\psi(h)) + h(1 + \varphi(h))\cos(x) = \sin(x) + h\cos(x) + h\theta(h) \\ \cos(x+h) = \cos(x)(1 + h\psi(h)) - \sin(x)h(1 + \varphi(h)) = \cos(x) - h\sin(x) + h\rho(h) \end{cases}$
avec $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} \rho(h) = 0$ d'où $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Pour tan appliquons la formule de la dérivée d'un quotient (voir plus loin) :
Comme $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ on a $\tan'(x) = \frac{(\sin)'(\cos) - (\sin)(\cos)'}{\cos^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
On a aussi $\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

➠ Pour la fonction exponentielle, la propriété traduit la définition de cette fonction.

PROPRIÉTÉ 2.15 (OPÉRATIONS (1)) Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Dérivée d'une somme : la fonction $f + g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
Produit par un réel : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ la fonction λf est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.

DÉMONSTRATION ➠ f et g étant dérivables en $x \in I$ on a $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$ et $g(x + h) = g(x) + hg'(x) + h\psi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} \psi(h) = 0$. Par conséquent
$(f + g)(x + h) = (f + g)(x) + h[f'(x) + g'(x)] + h\theta(h)$ où θ est définie par $\theta(h) = \varphi(h) + \psi(h)$.
Cette fonction est telle que $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = 0$, d'où la conclusion.

➠ f étant dérivable en $x \in I$ on a $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.
Par conséquent $\lambda f(x + h) = \lambda f(x) + h[\lambda f'(x)] + h\psi(h)$ où ψ est définie par $\psi(h) = \lambda\varphi(h)$.
Cette fonction est telle que $\lim\limits_{h\to 0} \psi(h) = 0$, d'où la conclusion.

Conséquence : Une fonction polynôme de degré n est dérivable sur $\mathbb{R}$:
Si $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$ alors $f' : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k x^k$ où $a'_k = (k + 1)a_{k+1}$.
Le monôme de plus haut degré étant $a'_{n-1} = a_n x^{n-1}$, la dérivée de f est un polynôme de degré $n - 1$.
Par exemple, si $f(x) = 5x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 8x + 9$ alors $f'(x) = 20x^3 - 18x^2 + 14x - 8$.

PROPRIÉTÉ 2.16 (OPÉRATIONS (2)) Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Dérivée d'un produit : la fonction $h = f \times g$ est dérivable sur I et $h' = f' \times g + f \times g'$
Dérivée d'un quotient : la fonction $h = \frac{f}{g}$ est dérivable sur $\{x \in I, g(x) \neq 0\}$ et $h' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

DÉMONSTRATION ➠ f et g étant dérivables en $x \in I$ on a $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$ et $g(x+h) = g(x) + hg'(x) + h\psi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} \psi(h) = 0$. Par conséquent
$(fg)(x+h) = (fg)(x) + h[f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)] + h\theta(h)$ où θ est la fonction définie par
$\theta(h) = f(x)\psi(h) + g(x)\varphi(h) + h[f'(x)g'(x) + f'(x)\psi(h) + g'(x)\varphi(h) + \psi(h)\varphi(h)]$.
x étant fixé, c'est h qui tend vers 0. Cette fonction est telle que $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = 0$, d'où la conclusion.

➠ Déterminons tout d'abord la dérivée de la fonction i définie par $i(x) = \frac{1}{g(x)}$.
Pour un réel x_0 de I , le taux de variation de i entre $x_0 + h$ et x_0 est :

$$\tau = \frac{i(x_0+h) - i(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \frac{\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \times \frac{-1}{g(x_0+h)g(x_0)}$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = g'(x_0)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{g(x_0+h)g(x_0)} = \frac{-1}{g^2(x_0)}$, on en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} \tau = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
La fonction i a pour dérivée la fonction définie par $i'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$.
Il ne reste plus qu'à appliquer la propriété précédente à la fonction $h = \frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g} = fi$:
$h' = fi' + f'i$; pour un réel $x \in I$ cela s'écrit $h'(x) = \dfrac{-f(x)g'(x)}{g^2(x)} + \dfrac{f'(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Remarques et exemples :

- Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
  La fonction $g = f^2$ est dérivable sur I et, par application de la dérivée d'un produit, $g' = 2ff'$.
  Par exemple, la dérivée de $g : x \mapsto (5x^2 - 3x + 1)^2$ est définie par $g' = 2ff'$ où
  $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ et $f'(x) = 10x - 3$.
  On a donc $g'(x) = 2(5x^2 - 3x + 1)(10x - 3)$ (NB : ne pas développer le carré pour dériver f !)
- Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.
  Par exemple, $f : x \mapsto \frac{3x-2}{x^2-1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
  Comme $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x - 2$, $v(x) = x^2 - 1$, $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2x$, par application de la dérivée d'un quotient, $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. On a donc $f'(x) = \frac{3(x^2-1)-2x(3x-2)}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2+4x-3}{(x^2-1)^2}$

PROPRIÉTÉ 2.17 (DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit g une fonction dérivable sur J. $g \circ f$ est dérivable sur $\{x \in I, f(x) \in J\}$ et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$

DÉMONSTRATION f étant dérivable en $x \in I$ on a $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ et g étant dérivable en $f(x) \in f(I)$ on a $g(f(x) + k) = g(f(x)) + kg'(f(x)) + k\psi(k)$ avec $\lim\limits_{k\to 0} \psi(k) = 0$. Prenons $k = hf'(x) + h\varphi(h)$; lorsque $h \longrightarrow 0$, on a bien $k \longrightarrow 0$.
Avec cette expression de k le développement limité de $g(f(x) + k)$ devient celui de $g(f(x+h))$:
$g(f(x+h)) = g(f(x)) + (hf'(x) + h\varphi(h))\,(g'(f(x)) + \psi(k)) = g(f(x)) + hf'(x)g'(f(x)) + h\theta(h)$
L'expression de la fonction θ est assez compliquée, mais il est clair que cette fonction tend vers 0 quand $h \longrightarrow 0$. En effet $\theta(h) = f'(x)\psi(k) + \varphi(h)g'(f(x)) + \varphi(h)\psi(k)$.
Du fait que $\lim\limits_{h\to 0} \psi(k) = \lim\limits_{k\to 0} \psi(k) = 0$ (je n'écris pas l'expression $\psi(k)$ en fonction de h pour ne pas surcharger) et que $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, on a bien $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = 0$, d'où le résultat.

Applications : on a déjà dérivé f^2 (composée de f suivie de la fonction carrée) $(f^2)' = 2f'f$
et aussi $\frac{1}{f}$ (composée de f suivie de la fonction inverse) $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$ (on doit avoir $f > 0$).
Ces formules peuvent être obtenues avec cette nouvelle propriété, ainsi que beaucoup d'autres.

- La dérivée de $\sqrt{f}$ est $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$ (on doit avoir $f > 0$)
  Par exemple $\left(\sqrt{x^2 - x + 1}\right)' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$
- La dérivée de f^n est $(f^n)' = nf'f^{n-1}$
  Par exemple $\left((x^3-1)^3\right)' = 9x^2(x^3-1)^2$
- La dérivée de $\sin(f)$ est $f'\cos(f)$ et celle de $\cos(f)$ est $-f'\sin(f)$
  Par exemple $(\sin(2x-1))' = 2\cos(2x-1)$
- La dérivée de e^f est $f'e^f$. Par exemple $\left(e^{-x^2+1}\right)' = -2xe^{-x^2+1}$

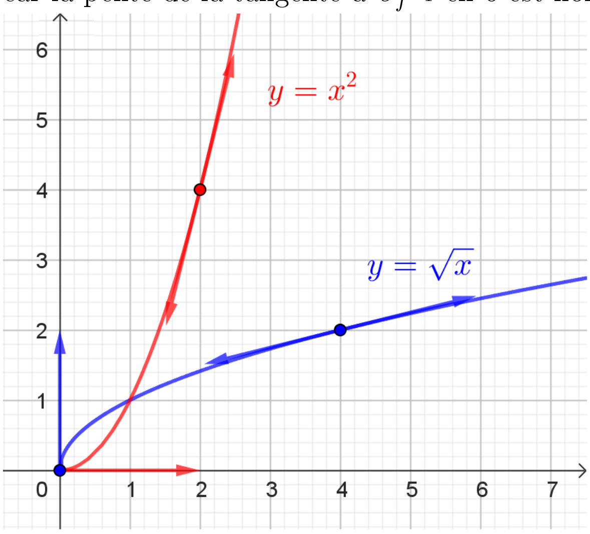
On peut dériver une fonction composée plus complexe en procédant par étapes :
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{f^n}$ est la composée de f suivie de $g : x \longmapsto x^n$ suivie de $h : x \longmapsto \frac{1}{x}$.
Ainsi, on peut dériver $(h \circ (g \circ f))' = (g \circ f)'(h' \circ (g \circ f)) = f'(g' \circ f)(h' \circ (g \circ f))$.
En ce qui concerne notre exemple $\left(\frac{1}{f^n}\right)' = f'(nf^{n-1})(\frac{-1}{f^{2n}}) = \dfrac{-nf'f^{n-1}}{f^{2n}} = \dfrac{-nf'}{f^{n+1}}$

Propriété 2.18 (Dérivée de la réciproque) Soit f une bijection de I vers $J = f(I)$.
Si f est dérivable sur alors f^{-1} est dérivable sur $\{y \in J, f' \circ f^{-1}(y) \neq 0\}$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

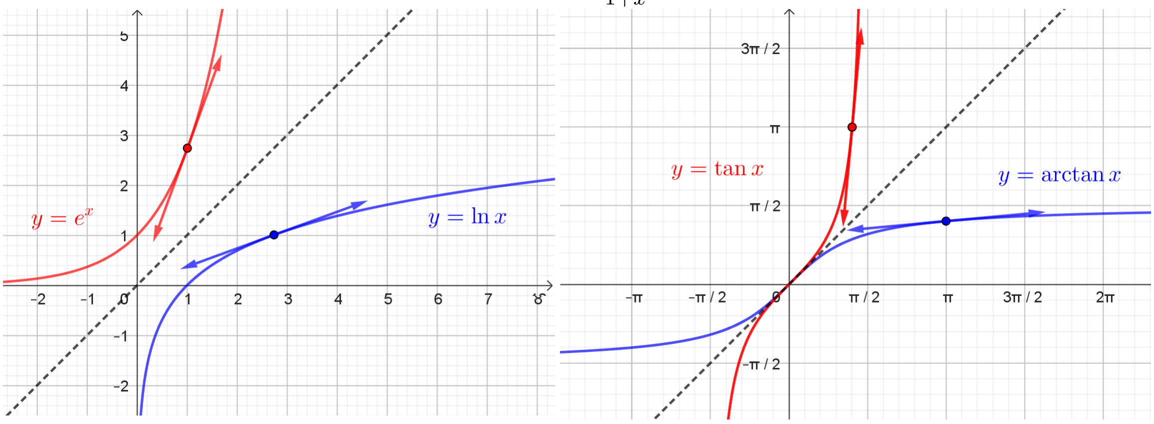
Démonstration La réciproque d'une bijection f définie sur I est la fonction f^{-1} définie sur $J = f(I)$ par $f \circ f^{-1} = Id$, c'est-à-dire $\forall y \in J,\ \ f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.
Dérivons $f \circ f^{-1}$ avec la propriété précédente, on obtient $(f \circ f^{-1})' = (f^{-1})' \times (f \circ f^{-1})$.
Comme $f \circ f^{-1} = Id$, par unicité de la dérivée d'une fonction $(f \circ f^{-1})' = (Id)' = 1$.
On en déduit $(f^{-1})' \times (f \circ f^{-1}) = 1$ et pour les $y \in J,\ \ f \circ f^{-1} \neq 0$ on a $(f^{-1})' = \frac{1}{f \circ f^{-1}}$.

Remarques :

- Cette propriété peut également se justifier en cherchant la limite de
  $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{\frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ lorsque y tend vers y_0, c'est-à-dire lorsque x tend vers x_0 (par composition des limites) d'où $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
- La dérivée de f^{-1} en $y = f(x)$ est donc l'inverse de la dérivée de f en x.
  Cette propriété signifie que les tangentes en $(x, f(x) = y)$ à la courbe de f et en $(y = f(x), f^{-1}(y) = x)$ à la courbe de f^{-1} ont des pentes inverses l'une de l'autre.
  Prenons $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $f^{-1} : x \longmapsto x^2$, fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Si la tangente en $(x = 4, y = 2)$ à $\mathscr{C}_f$ a pour pente $\frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ alors la tangente en $(x = 2, y = 4)$ à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ a pour pente $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ et on sait que $(f^{-1})'(2) = 2 \times 2 = 4$.
  La pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est verticale (a pour limite $+\infty$: f n'est pas dérivable en 0) car la pente de la tangente à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ en 0 est horizontale.



- Comme ln est la réciproque de exp, c'est-à-dire $x = \ln y \iff y = \exp x$, dérivons ln :
  $\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{\exp\circ\ln(y)} = \frac{1}{y}$
  La dérivée de ln est la fonction inverse sur $]0, +\infty[$
- On a vu que tan est dérivable sur $I =]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que sa dérivée est $\tan' = 1 + \tan^2$.
  Comme $1 + \tan^2 > 0$, tan est strictement monotone sur I.
  De plus, $\lim\limits_{x \to \frac{-\pi}{2}} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$.
  On en a déduit que tan définit une bijection de I vers $\mathbb{R}$.
  Sa fonction réciproque $\tan^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
  $\left(\tan^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{\tan'(\tan^{-1}(y))} = \frac{1}{1+(\tan(\tan^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1+(\tan\circ\tan^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1+y^2}$
  La dérivée de $\tan^{-1}$ est donc la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$



Définition 2.10 (Dérivée seconde) Soit f une fonction dérivable sur I telle que sa dérivée f' soit dérivable sur I. En notant $f'' = (f')'$ la dérivée de f', f'' est la *dérivée seconde* de f.

Remarques :

- On définit de même $f^{(3)}$ la dérivée 3e de f (si f'' est dérivable alors $f^{(3)} = (f'')'$) et si la fonction f est dérivable n fois, on note $f^{(n)}$ la dérivée ne de f. Avec cette notation, on a $f^{(1)} = f'$ et $f^{(0)} = f$.
- Une autre notation est utilisée, en physique notamment : $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (dérivée de f par rapport à la variable x), $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ (on dérive f deux fois par rapport à la variable x), etc.
- Un polynôme, comme $P(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ par exemple, est dérivable autant de fois qu'on le souhaite : $P'(x) = 6x^2 - 2x + 5$, $P''(x) = 12x - 2$, $P^{(3)}(x) = 12$, $P^{(4)}(x) = 0$, etc.

4. Sens de variation d'une fonction

4.a. TAF

Théorème 2.9 (Rolle) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Dans ces conditions, il existe au moins un réel $c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$

Démonstration Si f est constante sur $[a, b]$ alors tout point $c \in [a, b]$ vérifie $f'(c) = 0$.
On suppose désormais f non constante.
Il existe donc au moins un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$.
D'après la propriété 2.10 l'ensemble image de $[a, b]$ est $[\min, \max]$ où min et max sont le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$.
Par conséquent, il existe bien un maximum et un minimum (l'un éventuellement situé en a et b), c'est-à-dire un point pour lequel la dérivée s'annule.
Si $f(x_0) > f(a)$ il existe au moins un maximum ; si $f(x_0) < f(a)$ il existe au moins un minimum.

THÉORÈME 2.10 (ACCROISSEMENTS FINIS) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Dans ces conditions, il existe au moins un réel $c \in]a, b[,\ \ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

DÉMONSTRATION Si g la fonction définie par $g(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- $g(a) = f(a) - (a - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f(a)$
- $g(b) = f(b) - (b - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$

Ainsi g est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (par addition de fonctions continues et dérivables) telle que $g(a) = g(b)$. D'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a, b[,\ \ g'(c) = 0$.
La fonction g' est définie par $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Ainsi $\exists c \in]a, b[,\ \ f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarque : Si on connait un encadrement $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout x de $]a, b[$ on en déduit un encadrement du taux d'accroissement $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

4.b. Etude des fonctions

THÉORÈME 2.11 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'intervalle I éventuellement privé de ses bornes :
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) < 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I

DÉMONSTRATION La réciproque de cette propriété a été démontrée dans le cours de 1re.
➠ Supposons que $f'(x) \geqslant 0$ sur I.
Pour tout couple $(a, b > a)$ de réels de I, la fonction est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, d'après le TAF, il existe donc un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Comme $f'(c) \geqslant 0 \iff \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$ et $b > 0$, on en déduit $f(b) - f(a) \geqslant 0 \iff f(b) \geqslant f(a)$.
Ceci étant vrai pour tout couple de réels de I, on en déduit que la fonction f est croissante sur I.

➠ Montrons, par l'absurde, que si $f'(x) \geqslant 0$ avec $f'(x) = 0$ pour seulement un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I.
Supposons que f est croissante sans être strictement croissante sur I.
Il existe alors nécessairement deux réels distincts x_0 et $x_1 > x_0$ tels que $f(x_0) = f(x_1)$ (sinon f serait strictement croissante).
Pour tout réel $x \in [x_0, x_1]$, comme f est croissante on a $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$ et comme $f(x_0) = f(x_1)$ on en déduit $\forall x \in [x_0, x_1],\ \ f(x) =$ Constante. Cela signifie que f' s'annule sur tout cet intervalle, soit un nombre infini de points, ce qui est exclu par hypothèse.
f est donc strictement croissante sur I.

➠ Le même type de raisonnement s'applique pour les deux autres cas ($f'(x) = 0$ et $f'(x) \leqslant 0$).

Remarque :
L'ensemble formé par ce théorème et sa réciproque constitue le « principe de Lagrange ».
Il permet d'associer le sens de variation d'une fonction avec le signe de sa dérivée.

Propriété 2.19 (Condition extremum) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si, sur un intervalle ouvert inclus dans I et contenant x_0, f admet un *extremum local* en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration Supposons que, sur l'intervalle $]a, b[$ contenant x_0, f admette un maximum en x_0 : supposons donc que $\forall x \in]a, b[, \; f(x) \leqslant f(x_0)$.
Comme x_0 n'est pas une extrémité de l'intervalle

- pour $x < x_0$ la fonction f doit croitre pour atteindre finalement $f(x_0)$
- pour $x > x_0$ la fonction f ne peut que décroitre.

La dérivée doit donc passer de valeurs positives a des valeurs négatives et, f' étant continue, d'après le TVI, elle doit passer par la valeur 0 en x_0.
Même raisonnement si f admet un minimum en x_0.

Remarque :

- Attention la réciproque est fausse ! La fonction cube : $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$. Pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum local de f : la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la dérivée $3x^2$ étant strictement positive sauf en un point où elle s'annule.
- La présence d'un extremum local (on dit aussi extremum relatif) exige que l'intervalle soit ouvert. La fonction $g : x \longmapsto (\sqrt{x})^2$ par exemple admet un minimum sur $[0, 1]$ en $x_0 = 0$ et pourtant $g'(x_0) = 1 \neq 0$.

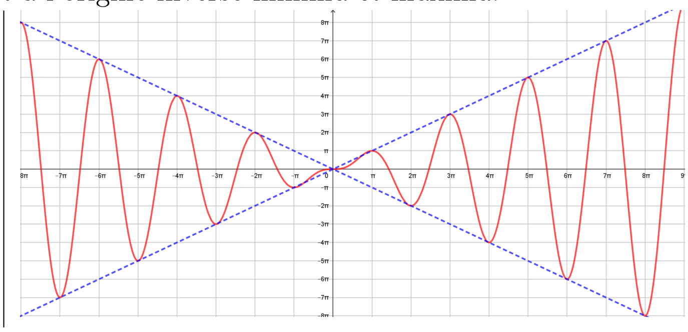
Propriété 2.20 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$ tel que f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

Remarque :
Cette propriété, alliée au principe de Lagrange, est au centre de toutes les études de fonction.

1. Déterminer les périodes et les symétries et délimiter en conséquence l'ensemble d'étude utile E
2. Partager si possible E en intervalles I sur lesquels le principe de Lagrange peut être appliqué
3. Dresser le tableau des variations de f restreinte à E (justifiées par les signes de f')
4. Compléter avec les limites aux bornes ouvertes de E et les éventuelles asymptotes.

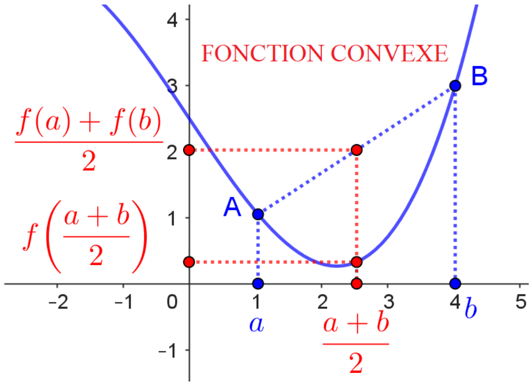
Exemple 7 – Étudions les variations de la fonction $f : x \longmapsto \sin x - x \cos x$.
Cette fonction est impaire car $f(-x) = \sin(-x) - (-x)\cos(-x) = -\sin x + x \cos x = -f(x)$.
L'ensemble d'étude utile E est $\mathbb{R}^+$.
f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos x + x \sin x - \cos x = x \sin x$.
La dérivée f' s'annule en changeant de signe pour $x = 0 \;\; [\pi]$ ce qui conduit à une succession de maximum et de minimum locaux, alternativement. Il n'y a que pour $x = 0$ que la dérivée s'annule sans changer de signe (car x et $\sin x$ change simultanément de signe) d'où l'absence d'extrémum local pour cette valeur. La représentation graphique, à cet égard, permet de bien visualiser la situation.
Les maxima locaux sont alignés sur la droite d'équation $y = x$: $f(\pi) = \sin(\pi) - (\pi)\cos(\pi) = \pi$, $f(3\pi) = \sin(3\pi) - (3\pi)\cos(3\pi) = 3\pi$, etc. De même pour les minima locaux (alignement sur la droite d'équation $y = -x$). La symétrie par rapport à l'origine inverse minima et maxima.

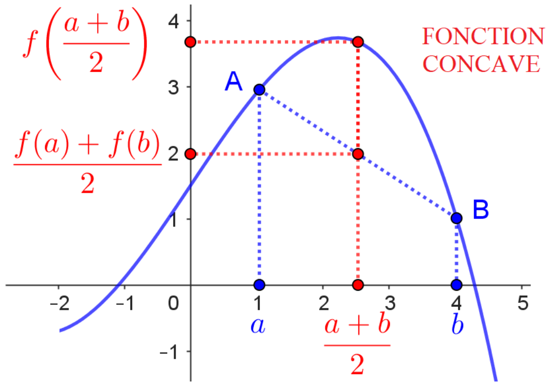
x	0		π		2π		3π		$\dots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\dots$
f	0	$\nearrow$	π	$\searrow$	-2π	$\nearrow$	3π	$\searrow$	$\dots$



4.c. Convexité

Définition 2.11 (Fonction convexe/concave) Une fonction f est *convexe* (respect. *concave*) sur un intervalle I si pour tout couple de points (A, B) situés sur sa courbe $\mathscr{C}_f$, le segment $[AB]$ est au-dessus (resp. en dessous) de la portion de $\mathscr{C}_f$ située entre A et B.





Remarques :

- On peut traduire cette définition d'une fonction convexe (resp. concave) : $\forall a, b \in I^2,\ \frac{f(a)+f(b)}{2} > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (resp. $<$). Les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ étant situés sur la courbe $\mathscr{C}_f$, le point $C(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ l'est aussi, situé entre A et B. Par contre, le point $(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2})$ est le milieu du segment $[AB]$: par définition, ce point est au-dessus de C si la fonction est convexe, en-dessous si elle est concave.
- Cette remarque se généralise à tous points C_μ de coordonnées $(\mu a + (1-\mu)b, f(\mu a + (1-\mu)b))$ et $(\mu a + (1-\mu)b, \mu f(a) + (1-\mu)f(b))$ où μ est un réel de l'intervalle $[0, 1]$ (si $\mu = \frac{1}{2}$, on se retrouve avec la remarque précédente) : ce dernier point est au-dessus de C_μ si la fonction est convexe, en-dessous si elle est concave.
  Autre caractérisation d'une fonction convexe (resp. concave) :
  $\forall a, b > a \in I^2,\ \ \forall x \in [a, b],\ \ f(x) \leqslant f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (resp. $>$), le membre de droite de cette proposition étant simplement l'équation de la droite (AB).
- Connaissant les courbes des fonctions de référence, on peut dors et déjà affirmer que la fonction exponentielle et la fonction carrée sont convexes sur $\mathbb{R}$, la fonction cube est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et concave sur $\mathbb{R}^-$, la fonction racine carrée est concave sur $\mathbb{R}^+$, la fonction ln et la fonction inverse sont concaves sur $]0, +\infty[$, etc.

Propriété 2.21 (Dérivée croissante) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f' est croissante sur I alors $\begin{cases} \forall a \in I,\ \ \forall x \in I,\ \ f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a) \\ \text{la fonction } f \text{ est convexe sur } I \end{cases}$

Démonstration ➠ Montrons d'abord que $\forall a \in I,\ \ \forall x \in I,\ \ f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a)$.
Étudions la fonction $g : x \longmapsto f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$. La dérivée de g est $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
$g'(x) \geqslant 0 \iff f'(x) \geqslant f'(a) \iff x \geqslant a$ car f' est croissante.
$g'(x) \leqslant 0 \iff f'(x) \leqslant f'(a) \iff x \leqslant a$ car f' est croissante.
g est donc décroissante pour $x \leqslant a$ et croissante pour $x \geqslant a$, elle admet un minimum en a.
Ce mimum est $g(a) = 0$, c'est-à-dire
$\forall x \in I,\ \ g(x) \geqslant g(a) \iff f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a)$.

➠ Montrons maintenant que cette propriété traduit le fait que f est convexe sur I.
Plus précisément montrons que $\forall a, b > 0 \in I^2,\ \ \forall x \in [a, b],\ \ f(x) \leqslant f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Pour cela étudions la fonction $h : x \longmapsto f(x) - f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
La dérivée de h est $h'(x) = f'(x) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

D'après le TAF sur $[a,b]$, $\exists c \in [a,b]$, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Ainsi $h'(x) = f'(x) - f'(c)$ et, comme f' est croissante :

- $h'(x) \geqslant 0 \iff f'(x) \geqslant f'(c) \iff x \geqslant c$
- $h'(x) \leqslant 0 \iff f'(x) \leqslant f'(c) \iff x \leqslant c$

h est donc décroissante pour $x \leqslant c$ et croissante pour $x \geqslant c$, elle admet un minimum en c.
Comme $h(a) = f(a) - f(a) + (a-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ et $h(b) = f(b) - f(a) + (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, la fonction h est négative entre a et b, c'est-à-dire $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
La fonction f est donc convexe.

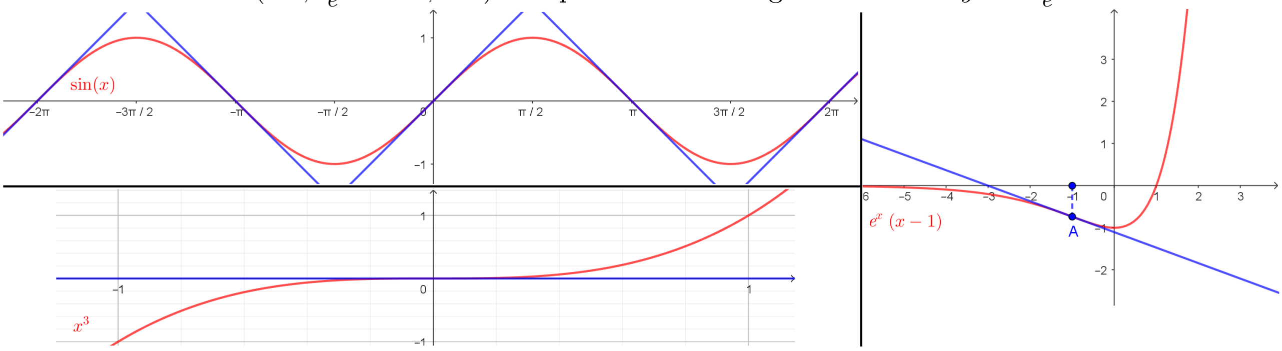
Remarques :

- On peut bien sûr énoncer aussi : si f est une fonction dérivable sur I et si f' est décroissante alors $\begin{cases} \forall a \in I, \ \ \forall x \in I, \ \ f(x) \leqslant f(a) + (x-a)f'(a) \\ \text{la fonction } f \text{ est concave sur } I \end{cases}$
- L'inégalité $f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a)$ se traduit graphiquement en disant que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes en tous points de l'intervalle I (en effet, l'équation de la tangente en $(a, f(a))$ est $y = f(a) + (x-a)f'(a)$). Par ailleurs, la condition f' est croissante sur I équivaut à $\forall x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$. Ainsi, cette propriété nous donne un moyen de tester la convexité (le signe de la dérivée seconde) et une propriété caractéristique (la position de la courbe par rapport à ses tangentes).

DÉFINITION 2.12 (POINT D'INFLEXION) Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I telle que, en $x = a$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. Dans ce cas, le point $(a, f(a))$ est un *point d'inflexion* pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

Remarques :

- Si la courbe d'une fonction admet un point d'inflexion en a, la tangente en a traverse la courbe $\mathscr{C}_f$. C'est ce qui se passe pour la courbe de la fonction cube en 0 ; la dérivée seconde de x^3 étant $6x$, celle-ci s'annule en changeant de signe, le point $(0,0)$ est donc un point d'inflexion pour cette courbe.
- Dans le cas de la fonction cube, la tangente qui traverse la courbe est horizontale. Mais ce n'est absolument pas la règle : la fonction sin par exemple a pour dérivée seconde $-\sin$, celle-ci s'annule en changeant de signe pour $x = 0 \ \ [\pi]$ mais la pente des tangentes en ces points d'inflexion est 1 (pour $x = 0 \ \ [2\pi]$) ou -1 (pour $x = \pi \ \ [2\pi]$).
- La fonction $f : x \longmapsto (x-1)e^x$ a pour dérivée première $f' : x \longmapsto xe^x$ et pour dérivée seconde $f'' : x \longmapsto (x+1)e^x$. Le signe de $x+1$ détermine donc la convexité de la courbe $\mathscr{C}_f$: pour $x > -1$ la courbe est convexe, sinon elle est concave, le point d'inflexion A ayant pour coordonnées $(-1, \frac{-2}{e} \approx -0,736)$. L'équation de la tangente en A est $y = \frac{-x-3}{e}$.



5. Logarithmes

5.a. Logarithme népérien

La propriété 2.11 nous a déjà permis de définir cette fonction car, la fonction exp, étant strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$, définit une bijection entre ces deux ensembles. Elle admet donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$ appelée « logarithme népérien » notée ln.

DÉFINITION 2.13 (FONCTION ln) La fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exp. Autrement dit $\forall x \in R,\ \ \forall y \in]0;+\infty[,\ \ y = e^x \Longleftrightarrow x = \ln y$.

PROPRIÉTÉ 2.22 (PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES) Ces propriétés découlent de la définition :

- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln e^2 = 2$, $\ln \frac{1}{e} = -1$, et plus généralement $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \ln(e^x) = x$
- $e^{\ln 1} = 1$, $e^{\ln 2} = 2$, et plus généralement $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ e^{\ln x} = x$
- L'ensemble de définition de $x \longmapsto \ln(u(x))$ est l'ensemble des $x \in \mathscr{D}_u$ tels que $u(x) > 0$
- L'équation $e^x = a$ a pour solution $x = \ln a$ si $a > 0$ (n'a pas de solution sinon)
  L'équation $\ln x = a$ a pour solution $x = e^a$

PROPRIÉTÉ 2.23 (DÉRIVÉE) La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

DÉMONSTRATION Cela a été montré comme application de la propriété 2.18 :
$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{\exp\circ\ln(y)} = \frac{1}{y}$

Remarques :

- Une conséquence immédiate est que la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
  On en déduit également le signe de ln : $\ln x < 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 1$ et $\ln x > 0 \Longleftrightarrow x > 1$
  La courbe de la fonction ln a été tracée dans les remarques de la propriété 2.11.
- La dérivée de la fonction composée $x \longmapsto \ln(u(x))$ est $x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.
  En particulier, si $f(x) = \ln(x^2-1)$ alors $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$. La fonction f est définie pour $x^2 - 1 > 0$ soit pour $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

PROPRIÉTÉ 2.24 (FONCTIONNELLE) Pour tous réels positifs a et b on a :
$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$, en particulier $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$

DÉMONSTRATION Connaissant la propriété fonctionnelle de la fonction exponentielle $e^{a+b} = e^a \times e^b$ qui transforme une somme en produit, on écrit $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)}$.
Comme $e^{\ln(a)} = a$ si $a > 0$, on obtient $e^{\ln(a)+\ln(b)} = a \times b = e^{\ln(ab)}$.
La fonction exponentielle étant une bijection on a l'équivalence $e^a = e^b \Longleftrightarrow a = b$.
Finalement on en déduit $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$: la fonction ln transforme un produit en somme.

En utilisant la propriété précédente $\ln(b) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln(1) = 0$.
On en déduit $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$.
Par conséquent $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

Attention : Cette propriété n'est utilisable que si a et b sont positifs strictement.
S'ils sont tous les deux négatifs, le produit ab et le quotient $\frac{a}{b}$ étant positifs, $\ln(ab)$ et $\ln(\frac{a}{b})$ existent mais la propriété ne peut être utilisée (ni $\ln(a)$ ni $\ln(b)$ ne sont définis).

PROPRIÉTÉ 2.25 (PUISSANCES) Soient a un réel positif et n un entier positif.

- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$
- $\ln(\sqrt[n]{a}) = \ln(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\ln(a)$ (pour $a \geqslant 0$ et à partir de $n = 2$)

DÉMONSTRATION ➠ Raisonnons par récurrence :
Pour $n = 0$, on a $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0\ln(a)$, la propriété est vérifée.
Pour $n > 0$, supposons que $\ln(a^n) = n\ln(a)$ et montrons que $\ln(a^{n+1}) = (n+1)\ln(a)$.
$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a^1) = \ln(a^n) + \ln(a) = n\ln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a)$.
La propriété est héréditaire, or elle est vraie pour $n = 0$, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

➠ $\ln(a^{-n}) = \ln(\frac{1}{a^n}) = -\ln(a^n)$ d'après la propriété fonctionnelle.
En appliquant le résultat précédent $\ln(a^{-n}) = -\ln(a^n) = -n\ln(a)$.

➠ Par définition, on a $(\sqrt[n]{a})^n = a$ (la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est la réciproque de la fonction $x \longmapsto x^n$).
Par conséquent $\ln((\sqrt[n]{a})^n) = \ln(a)$ et comme, d'après la première proposition $\ln((\sqrt[n]{a})^n) = n\ln(\sqrt[n]{a})$, on en déduit $\ln(a) = n\ln(\sqrt[n]{a}) \Longleftrightarrow \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\ln(a)$.

Remarques : Pour tout réel positif $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
En effet $(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{n}{n}} = x$ et, comme pour $x \geqslant 0$ on a $x^{\frac{1}{n}} \geqslant 0$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
Cette notation permet de retrouver plus facilement la dérivée de $\sqrt[n]{x}$ que l'on sait obtenir avec le théorème de dérivation de la réciproque : $(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}}$ d'où $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$
La propriété $(x^n)' = nx^{n-1}$ appliquée avec $\frac{1}{n}$ s'écrit $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}$.
Les deux résultats sont égaux $\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}$ car $x^{\frac{n-1}{n}} = x^{\frac{1}{n}\times n-1} = (x^{\frac{1}{n}})^{n-1} = (\sqrt[n]{x})^{n-1}$
Les autres propriétés fonctionnelles des puissances sont respectées avec cette notation :

- $(x^n)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^n = x$
- $(xx')^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} \times x'^{\frac{1}{n}}$
- $(\frac{x}{x'})^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{x'^{\frac{1}{n}}}$
- $x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{p}} = x^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}$
- $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{p}}} = x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}$
- $(x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{p}} = x^{\frac{1}{np}}$

Toutes ces propriétés peuvent être justifiées, cela constitue un bon exercice de s'y essayer.

PROPRIÉTÉ 2.26 (LIMITES) Au voisinage des bornes ouvertes de l'ensemble de définition :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

DÉMONSTRATION ➠ D'après la définition 2.1 on doit déterminer x_0 tel que
$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x > x_0,\ \ln(x) > A$.
Or $\ln(x) > A \Longleftrightarrow e^{\ln(x)} > e^A \Longleftrightarrow x > e^A$, il suffit donc de prendre $x_0 = e^A$.

➠ Pour la limite en 0+ on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(\frac{1}{X}) = \lim\limits_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\infty$.
J'ai opéré un changement de variable en prenant $X = \frac{1}{x}$, sachant que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Remarque : La fonction ln a une limite infinie au voisinage de l'infini mais la croissance de cette fonction est de plus en plus lente.

$\ln(x) >$	1	5	10	50	100	500
$x >$	$2,718$	148,413	22 026,466	$5,185 \times 10^{21}$	$2,688 \times 10^{43}$	$1,404 \times 10^{217}$

PROPRIÉTÉ 2.27 (CROISSANCES COMPARÉES) Au voisinage de $+\infty$ comme au voisinage de 0^+, la fonction ln est dominée par toutes les fonctions puissances ($x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$) :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{n}}} = 0$

$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt[n]{x}\ln(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{n}}\ln(x) = 0$

DÉMONSTRATION ➠ Effectuons le changement de variable $X = \ln(x) \iff e^X = e^{\ln(x)} = x$.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, or $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{X}{e^X} = \frac{1}{\frac{e^X}{X}}$
On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0^+$

➠ Posons, cette fois, $X = x^n$.
Ainsi, comme $\ln(x^n) = n\ln(x)$, on en déduit $\ln(x) = \frac{\ln(X)}{n}$ et $\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(X)}{nX} = \frac{1}{n} \times \frac{\ln(X)}{X}$
Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{\ln(X)}{X} = 0^+$

➠ De la même façon, en posant $X = x^{\frac{1}{n}}$, comme $\ln(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\ln(x)$ on a $\ln(x) = n\ln(X)$.
D'où $\frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{n\ln(X)}{X} = n \times \frac{\ln(X)}{X}$
Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{X\to+\infty} n \times \frac{\ln(X)}{X} = 0^+$.

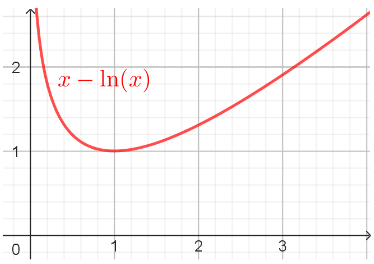
➠ Pour lever l'indétermination de type $0 \times \infty$ de $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x)$, posons $X = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{X}$.
Ainsi, comme $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$, on en déduit $\ln(x) = -\ln(X)$ et $x\ln(x) = \frac{-\ln(X)}{X}$
Par conséquent $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{-\ln(X)}{X} = -\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0^-$.

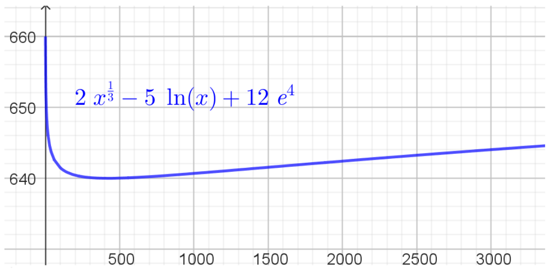
➠ Avec le même changement de variable $X = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{X}$ pour x et X strictement positifs, on obtient $x^n\ln(x) = \frac{-\ln(X)}{X^n}$ et comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X^n} = 0^+$ on en déduit
$\lim\limits_{x\to0^+} x^n\ln(x) = -\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X^n} = 0^-$.

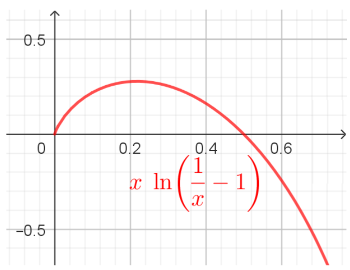
➠ Pour finir, en posant $X = x^{\frac{1}{n}}$ on a $\ln(x) = n\ln(X)$ et $x^{\frac{1}{n}}\ln(x) = nX\ln(X)$
d'où $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{n}}\ln(x) = n\lim\limits_{X\to0^+} X\ln(X) = 0^-$.

Remarques : Cette domination permet de lever certaines indétermination.
Notamment, au voisinage de $+\infty$, celles de type $\infty - \infty$, en mettant en facteur le terme dominant :

- La limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto x - \ln(x)$ est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
  En écrivant $x - \ln(x) = x(1 - \frac{\ln(x)}{x})$, on lève l'indétermination :
  comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1$, par produit on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
- De même pour $g : x \longmapsto 2\sqrt[3]{x} - 5\ln(x) + 12e^4$. On écrit $g(x) = \sqrt[3]{x}\left(2 - 5\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} + \frac{12e^4}{\sqrt[3]{x}}\right)$ et on conclut sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - 5\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} + \frac{12e^4}{\sqrt[3]{x}} = 2$, par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt[3]{x} = +\infty$







Au voisinage de 0^+ cherchons à lever l'indétermination de la limite de $h : x \longmapsto x\ln(\frac{1}{x} - 1)$
$h(x) = x\ln(\frac{1-x}{x}) = x(\ln(1-x) - \ln(x)) = x\ln(1-x) - x\ln(x)$.

Pour $x > 0 \iff -x < 0 \iff 1 - x < 1$, le 1er terme n'est pas une forme indéterminée en 0^+ :
$\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(1-x) = 0^-$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(1-x) = \lim\limits_{X \to 1^-} \ln(X) = 0^-$.
Le 2e terme a pour limite 0^+ d'après la propriété ($\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0^-$).

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$.

PROPRIÉTÉ 2.28 (TAUX D'ACCROISSEMENT) Au voisinage de 0, on a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

DÉMONSTRATION Cette expression $\frac{\ln(x+1)}{x}$ est le taux d'accroissement $\tau(x)$ de la fonction ln entre $1 + x$ et 1 : $\tau(x) = \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{(1+x)-1} = \frac{\ln(x+1)}{x}$
On sait que la limite de ce taux d'accroissement lorsque x tend vers 0 est le nombre dérivé $\ln'(1) = 1$.

5.b. Logarithme de base a

On a vu la fonction logarithme népérien : c'est la fonction logarithme de base e car $\ln(e) = 1$

DÉFINITION 2.14 (FONCTION $\ln_a$) a étant un réel strictement positif donné,
la fonction $\ln_a$ est définie pour tout $x > 0$ par $\ln_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

PROPRIÉTÉ 2.29 Les propriétés des fonctions $\ln_a$ sont similaires à celles de la fonction ln :

$\ln_a(a) = 1$	$\forall (x, x') \in]0, +\infty[^2, \ \ln_a(xx') = \ln_a(x) + \ln_a(x')$	$\forall n \in \mathbb{Z}, \ \ln_a(a^n) = n$
$\ln_a(1) = 0$	$\forall (x, x') \in]0, +\infty[^2, \ \ln_a(\frac{x}{x'}) = \ln_a(x) - \ln_a(x')$	$(\ln_a)'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$

DÉMONSTRATION Cela découle des propriétés de la fonction ln et $\forall x > 0, \ \ln_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \times \ln(x)$.
$\ln_a(xx') = \frac{1}{\ln(a)} \times \ln(xx') = \frac{1}{\ln(a)} \times (\ln(x) + \ln(x')) = \frac{1}{\ln(a)} \times (\ln(x)) + \frac{1}{\ln(a)} \times (\ln(x')) = \ln_a(x) + \ln_a(x')$
Les autres justifications sont similaires.

Remarques :

- Parmi toutes les fonctions $\ln_a$, la plus utilisée est la fonction *logarithme décimal* $\ln_{10}$, noté simplement log qui vérifie notamment la propriété $\log(10^n) = n$ conduisant au logarithme d'un nombre en écriture scientifique $\log(a \times 10^n) = n + \log(a)$. De nombreuses unités de mesure sont définies à partir des logarithmes décimaux : le potentiel Hydrogène d'une solution aqueuse est défini par $pH = -\log([H_3O^+])$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions hydronium H_3O^+ de la solution ; le décibel (dB) est l'unité de mesure d'une grandeur $X = 10 \times \log(\frac{P_1}{P_0})$ où P_1 est la puissance mesurée et P_0 une puissance de référence. Ainsi, en acoustique, on mesure le niveau sonore en décibels : 80 dB correspond à un son 10^8 fois plus important que le niveau sonore de référence (presque imperceptible).
- Le *logarithme binaire* est le logarithme de base 2, noté souvent lb au lieu de $\ln_2$. Il est utilisé en informatique principalement où la représentation d'un nombre en virgule flottante est $x = m \times 2^e$ avec une mantisse $1 \leqslant |m| < 2$ et un exposant e (la mantisse est écrite sans le 1 initial et l'exposant est décalé, voir le cours de NSI de 1re). Le logarithme binaire de x est alors égal à $lb(m) + e$ et l'ordinateur peut calculer $lb(m)$ bit par bit, en utilisant les propriétés : $lb(1) = 0$, $lb(x) = \frac{lb(x^2)}{2}$ et $lb(x) = lb(\frac{x}{2}) + 1$ (pour un nouveau bit de $0 < x < 2$, si $x^2 \geqslant 2$ on note 1 et on divise le résultat par 2, sinon on note 0 ; on réitère ensuite avec le résultat). Les autres logarithmes (népérien, décimal, etc.) sont évalués à partie du logarithme binaire grâce à la relation $log_a(x) = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} lb(x)$.

5.c. Exponentielle de base a

On a vu la fonction exponentielle : c'est la fonction exponentielle de base e car $e^x = e^{x\ln(e)} = \exp_e(x)$

Définition 2.15 (Fonction $\exp_a$) a étant un réel strictement positif différent de 1, la fonction $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp_a(x) = e^{x\ln(a)}$.

Propriété 2.30 (Fonction a^x) Soient $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp_a(x) = a^x$

Démonstration ➲ Si x est un entier $x = n$ avec $n \in \mathbb{N}$, on a
$\exp_a(x) = \exp_a(n) = e^{n\ln(a)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^n = a^n = a^x$.

➲ Si x est un rationnel positif $x = \frac{n}{p}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a
$\exp_a(x) = \exp_a(\frac{n}{p}) = e^{\frac{n}{p}\ln(a)} = \left(e^{\frac{1}{p}\ln(a)}\right)^n = \left(e^{\ln(a^{\frac{1}{p}})}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^n = a^{\frac{n}{p}} = a^x$.

➲ Si x est un rationnel négatif $x = -\frac{n}{p}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a
$\exp_a(x) = \exp_a(-\frac{n}{p}) = \frac{1}{e^{\frac{n}{p}\ln(a)}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{p}}} = a^{-\frac{n}{p}} = a^x$.

➲ Si x est un réel, on admettra la propriété en considérant que x peut alors être défini comme la limite d'une suite de rationnels (c'est toujours possible car $\mathbb{Q}$ est « dense » dans $\mathbb{R}$) qui, chacun, vérifient la propriété. Par unicité de la limite on en conclut que $\exp_a(x) = a^x$.

Propriété 2.31 Les propriétés des fonctions $\exp_a$ sont similaires à celles de la fonction exp :

$\forall x \in \mathbb{R},\ a^x > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ a^{\log_a(x)} = x$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(a^x) = x\ln(a)$	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ x = \log_a(y) \iff y = a^x$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a(a^x) = x$	$\forall x \in \mathbb{R},\ (a^x)' = \ln(a) \times a^x$

Démonstration $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x\ln(a)}$ or $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x > 0$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(a^x) = \ln(e^{x\ln(a)}) = \ln((e^x)^{\ln(a)}) = \ln(a)\ln(e^x) = x\ln(a)$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a(a^x) = \frac{\ln(a^x)}{\ln(a)} = \frac{x\ln(a)}{\ln(a)} = x$
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ a^{\log_a(x)} = e^{\ln(a)\times\log_a(x)} = e^{\ln(a)\times\frac{\ln(x)}{\ln(a)}} = e^{\ln(x)} = x$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ x = \log_a(y) \Longrightarrow a^x = a^{\log_a(y)} \Longrightarrow a^x = y$ et,
réciproquement $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ a^x = y \Longrightarrow \log_a(a^x) = \log_a(y) \Longrightarrow x = \log_a(y)$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ (a^x)' =_e^{x\ln(a)})' = \ln(a) \times a^x$ par dérivation d'une fonction composée.

Remarque :
Les propriétés algébriques des fonctions $\exp_a$ sont identiques à celles de la fonction exp.
Les fonctions $\log_a$ et $\exp_a$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.
Selon la valeur de $a > 0$, la fonction $x \longmapsto a^x$ est croissante ($a > 1$) ou décroissante ($a < 1$) :