I. PARTIE NUMÉRIQUE (12 points)

I. Exercice n°1.

Effectuer les deux calculs suivants en donnant les résultats sous forme simplifiée et en détaillant les étapes intermédiaires :

$$A=2+\frac{2}{15}+7\times\frac{1}{6}=\frac{30}{15}+\frac{2}{15}+\frac{7}{6}=\frac{32}{15}+\frac{7}{6}=\frac{64}{30}+\frac{35}{30}=\frac{99}{30}=\frac{33}{10}=3{,}3$$

$$B=\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\div\frac{4}{13}=\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\times\frac{13}{4}=\frac{5}{7}-\frac{2\times13}{4\times7}=\frac{5\times4}{4\times7}-\frac{26}{28}=\frac{20-26}{28}=\frac{-6}{28}=\frac{-3}{14}$$

I. Exercice n°2.

I. 2. a) Rendre irréductible le quotient $\frac{126}{175}$. 126 = 2×63 = 2×9×7 = 18×7 et 175 = 5×35 = 5×5×7 = 25×7, donc la fraction est simplifiable au maximum par 7 et la fraction irréductible est 18/25. 18 et 25 sont premiers entre eux car ils n'ont aucun diviseurs en commun, leur PGCD est 1. Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18 tandis que ceux de 25 sont 1, 5 et 25. On peut aussi calculer directement le PGCD de 126 et 175 avec l'algorithme d'Euclide:

175	126	49
126	49	28
49	28	21
28	21	7
21	7	0

PGCD(175;126) = 7 et donc, la fraction peut être simplifiée au maximum par 7.

I. 2. b) Un commerçant possède 175 boules de Noël rouges et 126 boules de Noël bleues.
Il a choisi de confectionner des sachets tous identiques. Il voudrait en avoir le plus grand nombre en utilisant toutes les boules. Combien de sachets pourra-t-il réaliser ? Il pourra réaliser 7 sachets identiques au maximum.
Combien de boules de chaque couleur y aura-t-il dans chaque sachet ?
Il y aura 175÷7=25 boules rouges et 126÷7=18 boules bleues.

I. Exercice n°3.

Le 1er janvier 2009, Thierry a placé 10 000 € sur son livret A. À la fin de chaque année, la banque augmente son capital de 4 % du montant placé ; le montant de cette augmentation s'appelle « l'intérêt ».

I. 3. a) Calculer le montant qu'aura Thierry à la fin de l'année 2009.
Pour commencer calculons le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 4%. C=1+4/100=1,04.
A la fin de l'année 2009, Thierry aura donc 10 000×1,04=10 400 euros.

I. 3. b) Calculer le montant qu'aura Thierry après trois années de placement, soit fin 2011.
A la fin de l'année 2010, Thierry aura 10 400×1,04 euros, car le coefficient est inchangé.
De même, la fin de l'année 2011, Thierry aura (10 400×1,04)×1,04 = 10 400×1,04² = 11 248,64 euros.

I. Exercice n°4.

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses ; justifier.

I. 4. a) « $\frac{3}{25}$ est un nombre décimal. » Vrai, car 3/25 = 12/100 = 0,12. 3/25 est un nombre rationnel qui peut se mettre sous la forme d'une fraction décimale, c'est donc un nombre décimal.

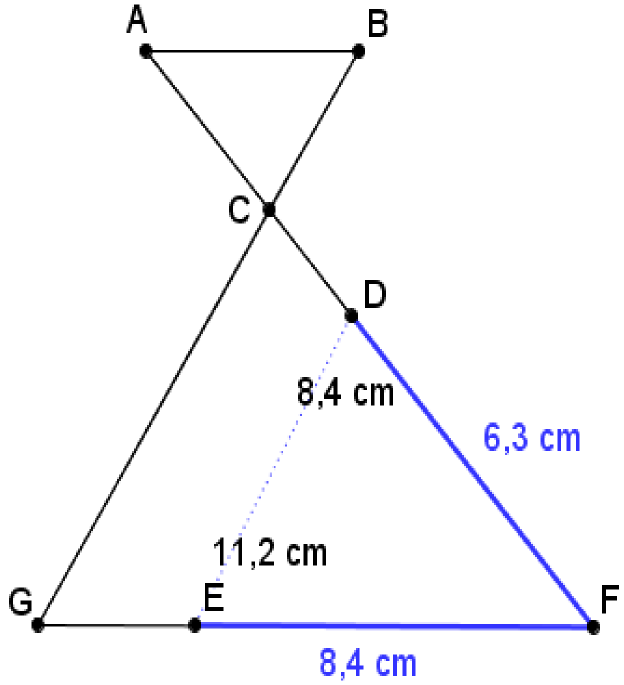
I. 4. b) « Les nombres 570 et 795 sont premiers entre eux. » Faux, car 570 et 795 sont tous les deux multiples de 5 (car ils se terminent par 0 ou par 5).

I. 4. c) « La somme de deux multiples de 5 est toujours un multiple de 5. » Vrai, car la multiplication est distributive par rapport à l'addition. Ainsi, si a et b sont deux entiers, alors 5a et 5b sont nos deux multiples et 5a+5b=5(a+b) est notre somme, qui est, comme on le voit un multiple de5.

II. PARTIE GÉOMÉTRIQUE (12 points)

II. Exercice n°1.

La figure ci-dessous n'est pas réalisée en vraie grandeur.
Les points A, C et F sont alignés, ainsi que les points B, C et G.
Les droites (AB) et (GF) sont parallèles. $AB = 3$ cm, $FC = 8{,}4$ cm et $FG = 11{,}2$ cm.



II. 1. a) Calculer la longueur CA.

Les droites (BG) et (AF) se coupent en C, les droites (BA) et (GF) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, on a donc:

$$\frac{AC}{CF}=\frac{BC}{CG}=\frac{AB}{GF} \text{ et donc }, \frac{AC}{8{,}4}=\frac{BC}{CG}=\frac{3}{11{,}2}$$

. Par conséquent, AC = $3\times8{,}4\div11{,}2=2{,}25$.

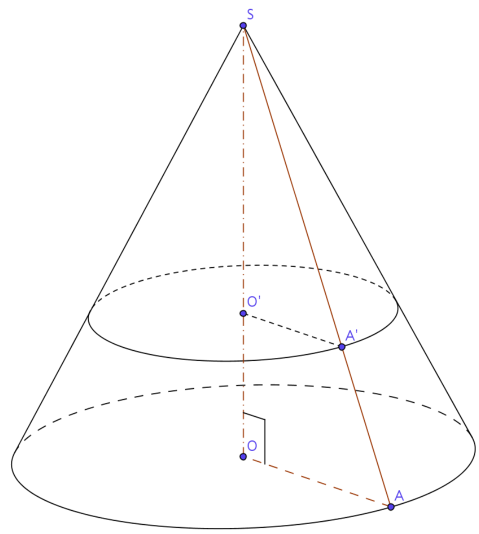
Soient D le point du segment $[CF]$ et E le point du segment $[GF]$ tel que : $FD = 6{,}3$ cm et $FE = 8{,}4$ cm.
II. 1. b) Montrer que les droites (GC) et (ED) sont parallèles.

$$\frac{FE}{FG}=\frac{8{,}4}{11{,}2}=0{,}75\ ;\ \frac{FD}{FC}=\frac{6{,}3}{8{,}4}=0{,}75\ ;\ donc : \frac{FE}{FG}=\frac{FD}{FC}$$

. Comme, de plus, les points C, D, F et G, E, F sont alignés dans cet ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (GC) et (ED) sont parallèles.

II. Exercice n°2.

On considère un cône $\mathcal{C}$ de hauteur $OS = 12$ cm et dont le rayon de la base mesure $OA = 5$ cm.
II. 2. a) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du cône $\mathcal{C}$ en valeur exacte. Donnez-en ensuite une valeur approchée au centième près.



Le volume du cône est

$$V=\frac{\pi\, r^2 h}{3}=\frac{\pi\, 5^2\times 12}{3}=\pi\times25\times4=100\pi\approx314{,}16cm^3$$

Le point O' est placé sur la hauteur $[SO]$ de telle sorte que $SO' = 7$ cm. Le cône $\mathcal{C}$ est coupé par un plan parallèle à la base de $\mathcal{C}$ et passant par le point O'. On obtient ainsi le cône $\mathcal{C}'$ de sommet S et dont le centre du disque de base est O'.
Le cône $\mathcal{C}'$ est une réduction du cône $\mathcal{C}$.
II. 2. b) Quel est le coefficient de cette réduction ?
Le petit cône est une réduction du grand, le coefficient de réduction est le rapport des hauteurs : SO'/SO soit 7/12.
II. 2. c) En déduire le volume $\mathcal{V}'$ du cône $\mathcal{C}'$ en valeur exacte et en valeur approchée au dixième près.
Le volume du petit cône est obtenu en multipliant le volume du grand par le cube du coefficient de réduction :

$$V'=\left(\frac{7}{12}\right)^3 100\pi=\frac{25\times\cancel{4}\times343}{432\times\cancel{4}}\pi=\frac{8575}{432}\pi\approx62{,}4cm^3$$

III. PROBLÈME (12 points)

III. 1ère PARTIE

Pour chaque question de cette partie, tracer sur la figure de la page 4 les traits utiles pour les lectures graphiques.

Sur la figure de la page 4 est représentée graphiquement la fonction f.

III. 1. a) Lire graphiquement $f(3)$. f(3)≈17,5 (les traits de construction sont en rouge sur le graphique)

III. 1 b) Lire graphiquement une valeur approchée de l'image par la fonction f de $\frac{1}{3}$.

Ici, on demande f(1/3), 1/3≈0,33 et f(1/3)≈0,2 (les traits de construction sont en orange).

III. 1. c) Déterminer graphiquement, s'il y en a, le ou les antécédent(s) par la fonction f de 4,5.

Ici, on demande de trouver x tel que f(x)=4,5. On trouve x≈1,6 ou x≈-1,6. Soit deux antécédents pour 4,5 par f. (les traits de construction sont en vert).

En fait, la fonction f est définie ainsi :

$$f : x \mapsto 2x^2$$

III. 1. d) Déterminer par le calcul la valeur exacte de l'image par la fonction f de $\frac{1}{3}$.

Par le calcul on trouve $f(1/3)= 2\times(1/3)^2 = 2\times(1/9) = 2/9 = 0,\underline{2} \approx 0,22$.

III. 1. e) Construire sur la figure de la page 4, la représentation graphique de la fonction linéaire g définie, pour tout nombre x, par :

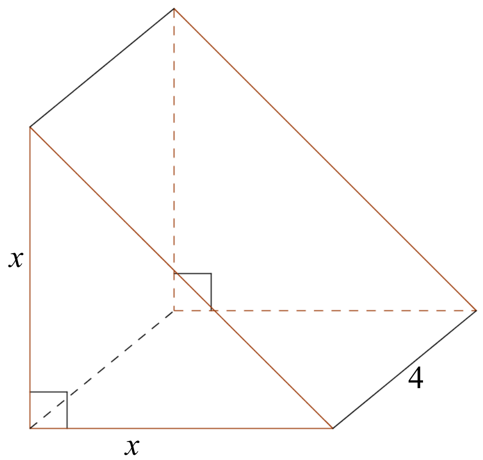
$$g(x) = 4x$$

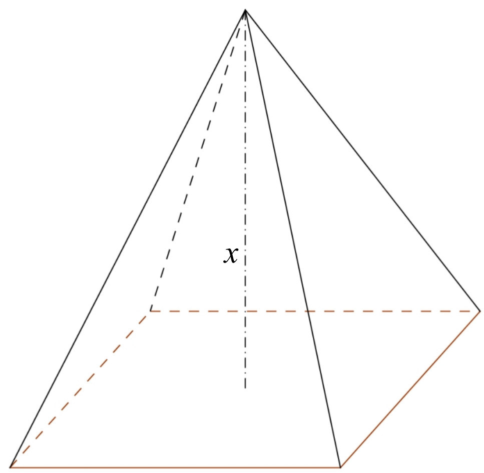
Vous justifierez la construction.

Pour construire la représentation graphique de g (la droite violette), j'utilise le point A de coodonnées (10;40) car g(10)=40. Je sais que g est linéaire et donc que sa représentation graphique est une droite passant par l'origine O (le point de coordonnées (0;0).

III. 2ème PARTIE

Deux solides ont des dimensions dépendantes d'un nombre x positif.





Le premier est un prisme dont les bases sont des triangles rectangles pour lesquels les côtés de l'angle droit mesurent x mètre(s) et dont la hauteur mesure 4 m. Le second est une pyramide dont la base est un rectangle de 3 m sur 4 m et dont la hauteur mesure x mètre(s).

III. 2. a) Exprimer les volumes du prisme et de la pyramide en fonction de x.

Le prisme a pour base le triangle rectangle isocèle d'aire $x^2/2$ et pour hauteur 4. Son volume est $(x^2/2)\times(4)=2x^2$.

La pyramide a pour base le rectangle d'aire $4\times3=12$ et pour hauteur x. Son volume est $(12)\times(x)/3=4x$.

III. 2. b) Reconnaître dans ces deux expressions laquelle est $f(x)$et laquelle est $g(x)$, f et g étant les fonctions définies à la 1ère partie. Le prisme a pour volume $2x^2$, soit f(x). La pyramide a pour volume $4x$, soit g(x).

III. 2. c) En déduire ensuite, toujours par le calcul, les volumes du prisme et de la pyramide lorsque $x = 1$.

Lorsque $x = 1$, le prisme a pour volume $2\times(1)^2 = 2\text{m}^3$. La pyramide a pour volume $4\times(1) = 4\text{m}^3$.

III. 2. d) Vérifier graphiquement les résultats obtenus à la question précédente et tracer, sur la figure de la page 4, les traits utiles pour ces lectures graphiques. Sur le graphique on retrouve ces valeurs en rose.

III. 2. e) Déterminer graphiquement la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (ou lesquelles) les deux volumes correspondants des deux solides sont égaux. Quel est alors ce volume commun ? Tracer, sur la figure de la page 4, les traits correspondants à cette lecture graphique.

Le point B de coordonnées (2;8) est sur les représentations graphiques de f et de g. Il nous donne par conséquent, la réponse à la question: lorsque x=2 le volume du prisme et de la pyramide sont égaux tous les deux à 8m^3.


f(3)=17,5
A
B
8
4,5
V prisme
V pyramide
f(1/3)=0,2
-1,6
O
1/3
1,6
2
x