Partie Numérique (12 points)

Exercice 1

Pour chacune des deux questions suivantes, plusieurs propositions de réponse sont faites. Une seule des propositions est exacte.
Aucune justification n'est attendue.

1) Alice participe à un jeu télévisé. Elle a devant elle trois portes fermées. Derrière l'une des portes, il y a une voiture ; derrière les autres, il n'y a rien.
Alice doit choisir l'une de ces portes. Si elle choisit la porte derrière laquelle il y a la voiture, elle gagne cette voiture.

Alice choisit au hasard une porte. Quelle est la probabilité qu'elle gagne la voiture ?

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{2}{3}$ d. On ne peut pas savoir

2) S'il y a quatre portes au lieu de trois et toujours une seule voiture à gagner, comment évolue la probabilité qu'a Alice de gagner la voiture ?

a. augmente b. diminue c. reste identique d. On ne peut pas savoir

Commentaire : Petit exercice sur les probabilités (niveau 3ème, très facile)
1) La bonne réponse est b. Il y a 3 cas possibles équiprobables (3 portes à ouvrir) et on en choisit une au hasard (nombre de cas favorable = 1). Donc p=1/3.
2) La bonne réponse est b. Il y a 4 cas possibles équiprobables (4 portes à ouvrir) et on en choisit toujours une au hasard (nombre de cas favorable = 1). Donc p'=1/4 et comme 1/4<1/3, p'<p.

Exercice 2

1) Quelle est l'écriture décimale du nombre $\frac{10^5+1}{10^5}$?

2) Antoine utilise sa calculatrice pour calculer le nombre suivant : $\frac{10^{15}+1}{10^{15}}$. Le résultat affiché est 1.
Antoine pense que ce résultat n'est pas exact. A-t-il raison ?

Commentaire : Petit exercice sur les notation scientifique (niveau 4ème, facile)
1) Le piège est d'utiliser la calculatrice incorrectement, sans mettre de parenthèses par exemple. Si on tape $(10^5+1)/10^5$, la calculatrice donne le bon résultat : 1,00001. On peut aussi calculer le numérateur $10^5+1=100\,001$ et diviser par $10^5=100\,000$ revient à déplacer la virgule de 5 rangs vers la gauche, d'où le résultat.
2) Si la calculatrice d'Antoine donne 1, c'est qu'elle a arrondi : le résultat exact serait 1,000 000 000 000 001 mais comme les calculatrices n'affichent jamais 16 chiffres, elle arrondit à 13 chiffres, et ça donne 1. Antoine avait donc raison, le résultat n'est pas exact.

Exercice 3

Lors d'un marathon, un coureur utilise sa montre-chronomètre. Après un kilomètre de course, elle lui indique qu'il court depuis quatre minutes et trente secondes.

La longueur officielle d'un marathon est de 42,195 km. Si le coureur garde cette allure tout au long de sa course, mettra-t-il moins de 3 h 30 pour effectuer le marathon ?

Commentaire : Petit exercice sur les vitesses (niveau 4ème, moins facile). Il y a des conversions à faire, le résultat intermédiaire (la vitesse) ne « tombe » pas juste, mais l'énoncé n'est pas méchant : il aurait demandé « moins de 3h15 », cela aurait été plus difficile (à cause du risque de confusion entre 3,16h et 3h16min...)

Le coureur parcourt 1km en 4min30s, soit 4,5min ou encore 4,5/60=0,075h. Sa vitesse est donc 1/0,075=13,333...km/h (40/3). A cette vitesse, il parcourt le marathon en 42,195/13,333...=3×42,195/40=3,164625h soit 3h et 0,164625×60=9,8775min.
Bien sûr, on peut faire autrement, sans calculer la vitesse, juste avec la proportionnalité :

1 km	42,195 km
4 min 30s=4,5 min	Produit en croix : 4,5×42,195÷1=189,8775 min, soit 3h et 9,8775 min

Exercice 4

On cherche à résoudre l'équation $(4x-3)^2-9=0$.

1) Le nombre $\frac{3}{4}$ est-il solution de cette équation ? et le nombre 0 ?

2) Prouver que, pour tout nombre x, $(4x-3)^2-9=4x(4x-6)$.

3) Déterminer les solutions de l'équation $(4x-3)^2-9=0$.

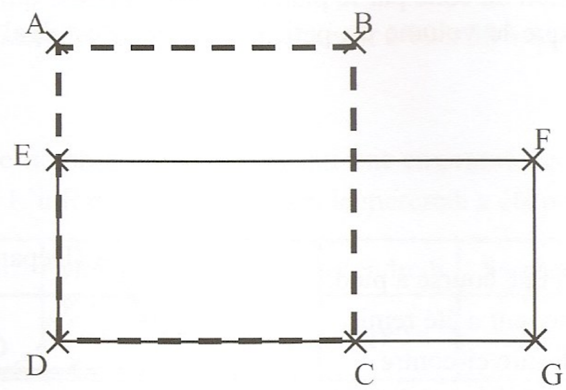
Commentaire : Exercice traditionnel sur factorisations/Équation produit-nul (niveau 3ème, facile)
1) Pour voir si ¾ est solution, on remplace : $(4\times\frac{3}{4}-3)^2-9=(3-3)^2-9=0-9=-9$ donc ¾ n'est pas solution, car on ne trouve pas 0.
Pareil pour 0, on remplace : $(4\times0-3)^2-9=(0-3)^2-9=9-9=0$ donc cette fois, 0 est solution, car on trouve bien 0.
2) On factorise à l'aide de l'identité remarquable $(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$, car $9=3^2$, on obtient :
$$(4\times x-3)^2-9=(4\times x-3)^2-3^2=(4x-3-3)(4x-3+3)=(4x-6)(4x)=4x(4x-6)$$
Bien sûr, on peut faire autrement, en développant les 2 membres et en comparant les formes développées et réduites (qui sont égales).
3) Grâce à la factorisation trouvée au 2) on déduit l'ensemble des solutions de l'équation : pour avoir $(4x-3)^2-9=0$, on doit avoir $4x(4x-6)=0$, soit, comme il s'agit d'un produit nul, $4x=0$ et donc x=0 (c'est la solution trouvée au 1)), soit $4x-6=0$ et donc x=6÷4=3÷2=1,5. Les solutions de l'équation sont donc 0 et 1,5.

<u>Partie Géométrique (12 points)</u>

Exercice 1

Le dessin ci-dessous représente une figure composée d'un carré ABCD et d'un rectangle DEFG.
E est un point du segment [AD].
C est un point du segment [DG].

Dans cette figure la longueur AB peut varier mais on a toujours : AE = 15 cm et CG = 25 cm.



1) Dans cette question on suppose que : AB = 40 cm
a) Calculer l'aire du carré ABCD.
b) Calculer l'aire du rectangle DEFG.

2) Peut-on trouver la longueur AB de sorte que l'aire du carré ABCD soit égale à l'aire du rectangle DEFG ?
Si oui, calculer AB. Si non, expliquer pourquoi.
Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

Commentaire : Petit problème d'ordre géométrique conduisant à une équation (niveau 4ème)
1) AB=DC=40cm, CG=25cm, comme D, C et G sont alignés, on a DG=DC+CG=40+25=65cm.
De même, AE=15cm, AD=40cm, comme A, E et D sont alignés, on a DE=AD−AE=40−15=25cm.
a) L'aire du carré ABCD est $AB^2=40^2=1600cm^2$.

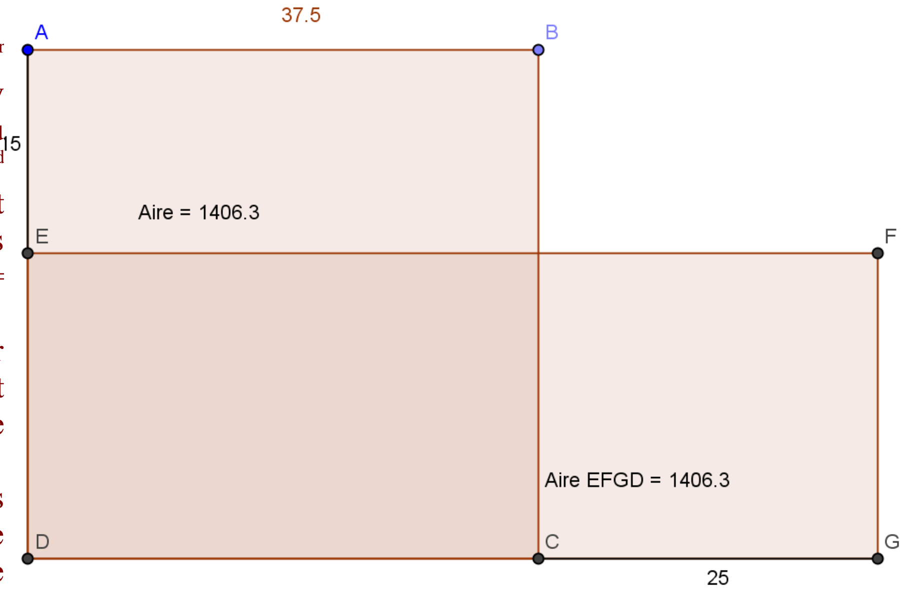
b) L'aire du rectangle DEFG est DE×DG=25×65=1625cm².

2) Pour que les aires du carré et du rectangle soient égales, on doit résoudre l'équation suivante :
Notons x le côté du carré. D'après la question précédente, l'aire du carré ABCD est $AB^2=x^2$ cm² alors que l'aire du rectangle DEFG est $DE\times DG=(x+25)\times(x-15)$ cm².

On doit donc avoir $(x+25)\times(x-15)=x^2$.

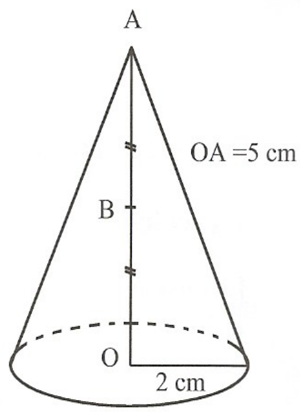
En développant le 1er membre, on s'aperçoit qu'il y a une simplification : au lieu d'être une équation du 2d degré, le terme en x^2 disparaît et l'on peut terminer les calculs. $(x+25)\times(x-15)=x^2+(25-15)x-25\times15=x^2+10x-375$ et donc, on doit avoir $x^2+10x-375=x^2$, soit $10x-375=0$, qui donne une solution unique $x=37{,}5$.

Lorsque AB=37,5cm, les aires du carré et du rectangle sont égales (la valeur exacte de cette aire est $37{,}5^2=1406{,}25$cm²).



Exercice 2

On considère un cône de révolution de hauteur 5 cm et dont la base a pour rayon 2 cm. Le point A est le sommet du cône et O le centre de sa base. B est le milieu de [AO].



1) Calculer le volume du cône en cm^3. On arrondira à l'unité.

On rappelle que la formule est : $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$

où h désigne la hauteur et R le rayon de la base.

2) On effectue la section du cône par le plan parallèle à la base qui passe par B. On obtient ainsi un petit cône. Est-il vrai que le volume du petit cône obtenu est égal à la moitié du volume du cône initial ?

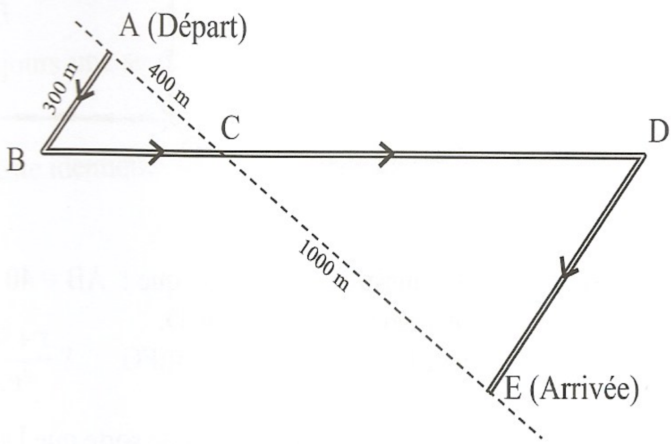
Commentaire : Exercice sur la section d'un cône par un plan parallèle à la base (niveau 3ème, facile)

1) Le volume du cône se calcule avec la formule : $V=\dfrac{\pi R^2 h}{3}=\dfrac{\pi 2^2\times 5}{3}=\dfrac{20\pi}{3}\approx 21\text{ cm}^3$

2) Lorsqu'on prend AB comme hauteur au lieu de AO, on divise les longueurs par 2 ; les volumes vont donc être divisés par 2^3 (car il s'agit d'une situation de réduction où les 3 longueurs sont divisées par 2) donc par 8, et non par 2. Le volume du petit cône n'est donc pas la moitié de celui du grand, l'affirmation est fausse.

Exercice 3

Des élèves participent à une course à pied.
Avant l'épreuve, un plan leur a été remis.
Il est représenté par la figure ci-contre.



On convient que :

- Les droites (AE) et (BD) se coupent en C.
- Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
- ABC est un triangle rectangle en A.

Calculer la longueur réelle du parcours ABCDE.

Commentaire : Exercice sur les théorèmes de Thalès et de Pythagore (niveau 4ème ou 3ème, facile).

La figure est une configuration de Thalès car (AE) coupe (BD) en C et (AB)//(DE). Donc les rapports $\frac{AB}{DE}$, $\frac{AC}{CE}$ et $\frac{BC}{CD}$ sont égaux. Pour connaître BC, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A : $BA^2+AC^2=BC^2$ et donc $BC^2=300^2+400^2=250000=500^2$, BC=500 m. On obtient les égalités suivantes : $\frac{300}{DE}=\frac{500}{CD}=\frac{400}{1000}$ qui conduisent à $DE=\frac{300\times 1000}{400}=750\,\text{m}$ et $CD=\frac{500\times 1000}{400}=1250\,\text{m}$. D'où, finalement la longueur du parcours ABCDE : AB+BC+CD+DE=300+500+1250+750=2800 m.

Problème (12 points)

Commentaires : la difficulté n'est pas très élevée, et les questions pourraient être traitées en 6ème pour la plupart (I1, I2a, I2b, I4, III) ou en 5ème (II1) la seule question qui relève du programme de 3ème est II2 (tangente). La question I3 concernant l'usage du tableur relève du programme de 4ème.

PARTIE I

À partir du 2 Janvier 2012, une compagnie aérienne teste un nouveau vol entre Nantes et Toulouse. Ce vol s'effectue chaque jour à bord d'un avion qui peut transporter au maximum 190 passagers.

1) L'avion décolle chaque matin à 9 h 35 de Nantes et atterrit à 10 h 30 à Toulouse.
Calculer la durée du vol.

2) Le tableau suivant donne le nombre de passagers qui ont emprunté ce vol pendant la première semaine de mise en service. L'information concernant le mercredi a été perdue.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche	**Total**
Nombre de passagers	152	143		164	189	157	163	**1113**

a) Combien de passagers ont emprunté ce vol le mercredi ?
b) En moyenne, combien y avait-il de passagers par jour dans l'avion cette semaine là ?

1) Entre 9h35 et 10h, il y a 25min. Le vol dure donc 25+30=55min. On peut effectuer la soustraction directement, mais il faut gérer correctement la retenue car 1h=60min (et non100). On peut transformer 10h30 en 9h90 (30+60=90) et soustraire 9h90− 9h35= 0h55.

2) a) On trouve le nombre cherché (passagers le mercredi) en retranchant les passagers les autres jours du total : 1113−152−143−164−189−157−163=145. Il y avait donc 145 passagers le mercredi.
b) En moyenne, il y avait 1113÷7=159 passagers chaque jour.

3) a) Pour calculer le TOTAL dans la cellule I2, il faut taper la formule =SOMME(B2:H2). On peut aussi taper =B2+C2+D2+E2+F2+G2+H2, le résultat sera identique.
b) Pour calculer la MOYENNE dans la cellule J2, il faut taper la formule =MOYENNE(B2:H2). On peut aussi taper =I2/7.

3) À partir du mois de Février, on décide d'étudier la fréquentation de ce vol pendant douze semaines. La compagnie utilise une feuille de calcul indiquant le nombre de passagers par jour. Cette feuille de calcul est donnée en **ANNEXE page 7/7**.

a) Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule I2 pour obtenir le nombre total de passagers au cours de la semaine 1 ?

b) Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule J2 pour obtenir le nombre moyen de passagers par jours au cours de la semaine 1 ?

Problème Partie I

J14 =MOYENNE (J2 : J13)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche	TOTAL	MOYENNE
2	Semaine 1	157	145	142	159	190	156	161	1110	159
3	Semaine 2	147	158	156	141	141	152	155	1050	150
4	Semaine 3	153	148	162	149	160	146	163	1081	154
5	Semaine 4	168	156	162	157	166	158	161	1128	161
6	Semaine 5	163	169	170	162	167	169	162	1162	166
7	Semaine 6	156	167	171	173	165	165	162	1159	166
8	Semaine 7	173	172	168	173	161	162	167	1176	168
9	Semaine 8	168	166	170	173	168	176	165	1186	169
10	Semaine 9	176	175	175	171	172	178	173	1220	174
11	Semaine 10	185	176	172	180	185	171	171	1240	177
12	Semaine 11	178	181	183	172	178	172	173	1237	177
13	Semaine 12	171	183	171	184	172	176	173	1230	176
14								moyenne sur trois mois :		166

4) Le nombre moyen de passagers par jour au cours de ces douze semaines est égal à 166. La compagnie s'était fixé comme objectif d'avoir un nombre moyen de passagers supérieur aux 80 % de la capacité maximale de l'avion.

L'objectif est-il atteint ?

4) 80% de 190 (le nombre de places dans l'avion) cela fait $0,8\times190=152$ personnes. Avec 166 passagers, les objectifs sont donc atteints (et même dépassés de plus de 7% car 166 sur 190, cela représente un peu plus de 87%).

Partie II
1) Le temps que met la lumière pour parcourir la distance d entre l'avion et la tour de contrôle est la moitié de 0,000 3s, soit 0,000 15s. L'avion se trouve à une distance d égale au produit de la vitesse par le temps, donc $300\,000\times0,000\,15=45$ km.
2) Le triangle ARI formé par l'Avion, le Radar et le pied de la hauteur I est rectangle en I. La tangente de l'angle en R vaut $\tan\widehat{ARI}=\frac{AI}{AR}$ d'où $AI=AR\tan\widehat{ARI}=45\tan5°\approx3,9\,\text{km}$.

Partie III
1) Par lecture graphique, 10s après avoir touché le sol, l'avion a parcouru 450m.
2) Au bout de 22s et de 26s, le graphique donne la même distance, car l'avion est alors arrêté (il a parcouru 800m pour s'arrêter).

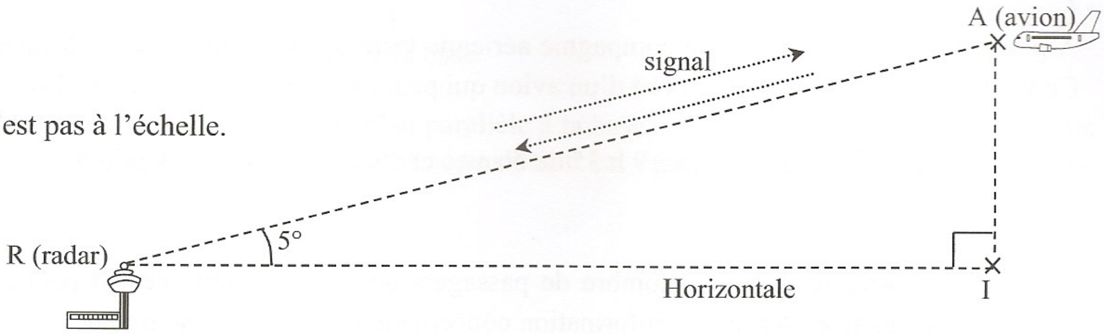
3) On constate qu'au bout de 20s l'avion n'avance déjà plus (il a parcouru la distance de 800m en 20s, soit à une vitesse moyenne de 40m/s ou 144km/h).

PARTIE II

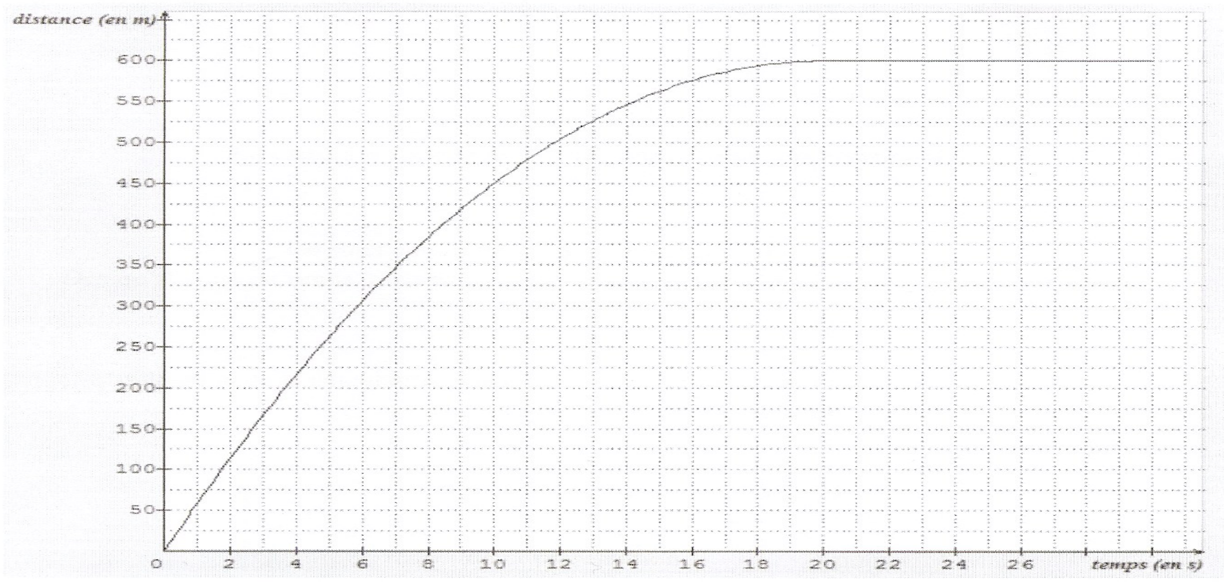
Quand l'avion n'est plus très loin de l'aéroport de Toulouse, le radar de la tour de contrôle émet un signal bref en direction de l'avion. Le signal atteint l'avion et revient au radar 0,0003 secondes après son émission.

1) Sachant que le signal est émis à la vitesse de 300 000 kilomètres par seconde, vérifier qu'à cet instant, l'avion se trouve à 45 kilomètres du radar de la tour de contrôle.

Le dessin n'est pas à l'échelle.



2) La direction radar–avion fait un angle de 5° avec l'horizontale.
Calculer alors l'altitude de l'avion à cet instant. On arrondira à la centaine de mètres près.
On négligera la hauteur de la tour de contrôle.



PARTIE III

En phase d'atterrissage, à partir du moment où les roues touchent le sol, l'avion utilise ses freins jusqu'à l'arrêt complet. Le graphique en **ANNEXE** représente la distance parcourue par l'avion sur la piste (en mètres) en fonction du temps (en secondes) à partir du moment où les roues touchent le sol. En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes :

1) Quelle distance l'avion aura-t-il parcourue 10 s après avoir touché le sol ?

2) Expliquer pourquoi au bout de 22 s et au bout de 26 s la distance parcourue depuis le début de l'atterrissage est la même.

3) À partir du moment où les roues touchent le sol, combien de temps met l'avion pour s'arrêter ?